



十三、變異數分析和試驗設計

Chapter 13 Analysis of variance and experimental design

學習目標

知識(認知)

- 可以清楚描述在變異數分析的意涵。
- 可以清楚描述在試驗設計的意涵。
- 分辨事前比較與事後比較之間的差異性。
- 可以說明各種情境下，如何選擇事後比較的方法。

技能

- 能夠計算各種情境下的檢定統計值— F 值。
- 能夠利用事後比較法，辨識母體平均值配對之間的差異性。
- 綜合所學，能夠於實務領域中，依據特定情境的需求進行變異數分析。

態度(情意)

- 意識到在日常生活或未來工作環境中，變異數分析的重要性。
- 在各種情境下，依據變異數分析獲得的推論，接受統計推論所傳達的意涵。

章節大綱

■ 十三、變異數分析和試驗設計

- ◆ 13.1 變異數分析介紹
- ◆ 13.2 變異數分析：檢定 k 個母體平均值相等
- ◆ 13.3 多重比較程序
- ◆ 13.4 試驗設計介紹
- ◆ 13.5 完全隨機設計
- ◆ 13.6 隨機區集設計
- ◆ 13.7 因子試驗

學習內容

- 變異數分析程序
- 多個母體平均值相等性變異數分析
- 各種多重比較程序
- 試驗設計
- 完全隨機設計
- 隨機區集設計
- 因子試驗

學習建議

【開始上課】下
載PDF講義預習



依據各單元順序，
瀏覽數位教材內
容



針對數位教材中
練習題目(來賓考
試)演練



同步上課學習



相關學習主題討
論



學習評量

變異數分析

- 變異數分析或變方分析(**A**nalysis **o**f **v**ariance)簡稱**ANOVA**。
- 變異數分析檢定三個(含)以上的母體平均值是否相等。
 - ◆ 利用變異數分析解析實驗型研究的數值資料。
 - ◆ 當在檢定三個(含)以上母體平均值是否相等時，若使用前述的方法，將三個(含)以上母體平均值的相等性檢定，拆解成兩個母體之間的方式，會使得需檢定的母體配對變很多。
 - ◆ 若檢定的次數愈多，發生第一種錯誤(type I error)機率愈高。
- 檢定三個(含)以上的母體平均值之相等性，必須使用變異數分析。

三種實驗條件

- A. 欲探索三種不同來源咖啡豆(操作變數)經義式濃縮咖啡機(Espresso Machine)製作的咖啡口感(依變數)是否有差異。
- B. 欲探索三種不同來源咖啡豆(操作變數1)分別經義式濃縮咖啡機(Espresso Machine)和虹吸式(蒸溜法)(操作變數2)製作的咖啡口感(依變數)是否有差異。
- C. 欲探索三種不同來源咖啡豆(操作變數1)分別經利用四種烘焙條件(操作變數2)，後利用義式濃縮咖啡機製作的咖啡口感(依變數)是否有差異。
- ◆ A只有「三種不同來源咖啡豆」一個操作變數稱為單因子變異數分析
 - ◆ B和C分別有兩個操作變數稱為雙因子變異數分析

提示舊經驗：激發學習動機

餐廳、旅行社或旅館經營管理

抽樣調查
產品品質、服務品質、消費者滿意度

推論三個(含)以上組別之間的差異

信賴水準
(推論成功機率)

變異數分析

採取因應作為

13.1 變異數分析介紹

- 變異數分析(ANOVA)檢定三個(含)以上的母體平均值是否相等，或驗證三個水準(含)以上的自變數對依變數是否有影響。
- 假設檢定：
 - ◆ 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ 所有母體平均值皆相等
 - ◆ 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j (i \neq j)$ 所有母體平均值不全部相等
- 變異數分析可視為驗證樣本平均值之差是否達到顯著性水準的一種程序。

進行變異數分析的假設

- A. 所有母體的觀測變數分布情況皆屬於常態分布。
- B. 所有母體的觀測變數之變異數 σ^2 皆相等、同質性或齊一性 (homogeneity)。
- C. 隨機抽取自各母體的樣本皆是相互獨立。
- D. 獨立變數(自變數)對依變數的影響是固定性或一致性。

13.2變異數分析：檢定 k 個母體均值相等

- 變異數分析用於檢定 k 個母體特定研究變數之平均值是否相等時，其假設檢定的通式：
- 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ 所有母體平均值皆相等
- 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j (i \neq j)$ 所有母體平均值不全部相等
 - ◆ μ_j : 第 j 個母體之平均值
 - ◆ k : 欲進行母體平均值檢定的母體數量

相關符號介紹

單因子變異數分析樣本資料表					
母體 \ 樣本	1	2	j	k	平均值
1	x_{11}	x_{12}	x_{1j}	x_{1k}	
2	x_{21}	x_{22}	x_{2j}	x_{2k}	
3	x_{31}	x_{32}	x_{3j}	x_{3k}	
4	x_{41}	x_{42}	x_{4j}	x_{4k}	
i	x_{i1}	x_{i2}	x_{ij}	x_{ik}	
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{nj}	x_{nk}	
樣本數量	n_1	n_2	n_j	n_k	
樣本平均值	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_j$	$\bar{x}_k$	$\bar{\bar{x}}$
樣本變異數	S_1^2	S_2^2	S_j^2	S_k^2	
樣本標準差	S_1	S_2	S_j	S_k	

$n_t = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$
 $= \sum_{j=1}^k n_j$ 來自全部 k 個母體的樣本總數量或觀測值總數量

若分別來自 k 個母體的樣本數量相等， $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_k = n$ ，則 $n_t = k \times n$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{k \times n} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} \frac{x_{ij}}{n}}{\frac{k \times n}{n}} = \frac{\sum_{j=1}^k \bar{x}_j}{k}$$

母體變異數之樣本間估計值

■ 母體變異數 σ^2 的樣本間估計值稱為處理間均方(mean square due to treatment, **MSTR**)、組間變異數 S_c^2 或因子變異數

■
$$\text{MSTR} = \frac{\sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{k-1} = \frac{\text{SSTR}}{k-1}$$

◆ $\sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{j=1}^k n_j \times \bar{x}_j^2 - n_t \times \bar{\bar{x}}^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$ ：處理間平方和(sum of squares due to treatment, **SSTR**)。

□ 將來自各母體的樣本觀測值，利用來自該母體的樣本平均值取代後，合併成一組資料，在計算其平方和，即為原始資料的組間平方和或組間變異。

◆ $k-1$: SSTR的自由度

線上討論：了解MSTR意涵？

虛無假設與對立假設

- 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ 成立
 - ◆ MSTR 提供母體變異數 σ^2 不偏的估計值
- 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j (i \neq j)$ 成立
 - ◆ k 個母體平均值不相等，MSTR 不是母體變異數 σ^2 不偏的估計值
 - ◆ MSTR 的估計會超過母體變異數 σ^2

母體變異數之樣本內估計值

■ 母體變異數 σ^2 的樣本內估計值稱為誤差均方(mean square due to error, **MSE**)或組內(不偏)變異數 S_e^2

■
$$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{\text{SSE}}{n_t - k}$$

◆ $\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$: 誤差平方和(sum of squares due to error, **SSE**)。

□ 利用來自於 k 個母體的樣本資料，計算來自各母體的樣本平方和，再將其樣本平方和加總，所獲得的平方和稱為來自於各母體樣本資料的組內平方和或組內變異。

◆ $n_t - k$: SSE的自由度

■ MSE是依據 k 個處理(k 組樣本)之內的變異性計算獲得，不受虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ 成立與否的影響。

■ MSE提供母體變異數 σ^2 不偏的估計值。

線上討論：了解MSE意涵？

比較變異數的估算值：F檢定

- 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ 成立時，MSTR和MSE是兩個相互獨立母體變異數 σ^2 的不偏估計值。
 - ◆ 母體特定研究變數屬於常態分布，兩個相互獨立的母體變異數估計值屬於F分布。
- 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ 成立，變異數分析的假設亦成立時， $\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$ 屬於分子自由度 $k-1$ 與分母自由度 n_t-k 的F分布。
- 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ 不成立時，MSTR數值會高估母體的變異數 σ^2 ， $\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$ 會增加。
 - ◆ 當 $\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$ 高於某一特定標準 $F_{\alpha, k-1, n_t-k}$ (顯著水準 α)，即可判定拒絕虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等。

檢定統計值 F

■ 檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$

◆ 檢定統計值 $F \leq$ 臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k}$ ，接受虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ 。

◆ 檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k}$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等。

Excel軟體F值函數操作

Excel指令	輸入資料	輸出資料
F.INV	左尾累積機率、分子自由度(deg_freedom1)、分母自由度(deg_freedom2)	F值
F.INV.RT	右尾累積機率、分子自由度(deg_freedom1)、分母自由度(deg_freedom2)	F值
FINV	右尾累積機率、分子自由度(deg_freedom1)、分母自由度(deg_freedom2)	F值

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源	平方和	自由度	均方	F 值
樣本間變異	SSTR	$k - 1$	$MSTR = \frac{SSTR}{k - 1}$	$\frac{MSTR}{MSE}$
樣本內變異	SSE	$n_t - k$	$MSE = \frac{SSE}{n_t - k}$	
合計	SST	$n_t - 1$		

- 不同變異來源的平方和之加總，稱為總平方和 (total sum of squares, SST) 或總變異。
- 總平方和(SST)除以其自由度($n_t - 1$)獲得總(全部)樣本變異數。
 - ◆ 可以視為暫時去除各種處理的區分，將所有觀測值皆視為同一組樣本。

總平方和(SST)

$$\blacksquare \text{ SST} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - n_t \times \bar{\bar{x}}^2 = \\ \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

$$\blacksquare \text{ SST} = \text{SSTR} + \text{SSE}$$

- ◆ 進行變異數分析時，可以將全部樣本變異數分為樣本間變異(treatments)和樣本內變異(error)兩項；
- ◆ 亦將其總平方和(SST)拆成樣本間變異的平方和(SSTR)和樣本內變異的平方和(SSE)。

Anova範例(1/4)

範例13.1 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取6位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，三家加盟店的服務品質是否相同？

題解： $k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量

樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 18$
來自 k 個母體的樣本數量相等，則 $n_t = k \times n$

$$\begin{aligned} \text{全部樣本平均值 } \bar{x} &= \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{k \times n} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} \frac{x_{ij}}{n}}{\frac{k \times n}{n}} = \frac{\sum_{j=1}^k \bar{x}_j}{k} = \\ &= \frac{87.5 + 93.0 + 91.0}{3} = 90.5 \end{aligned}$$

樣本	加盟店A1	加盟店A2	加盟店A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	78
5	95	91	98
6	90	98	85
樣本平均值	87.5	93.0	91.0
樣本變異數	27.5000	8.0000	64.0000
樣本標準差	5.2440	2.8284	8.0000

Anova範例(2/4)

範例13.1 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取6位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，三家加盟店的服務品質是否相同？

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 3-1, 18-3} = F_{0.05, 2, 15} = 3.6823(\text{F.INV})$

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 所有母體平均值皆相等

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等

D. 計算檢定統計值： F 值

$$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 6 \times (87.5 - 90.5)^2 + 6 \times (93.0 - 90.5)^2 + 6 \times (91.0 - 90.5)^2 = 54.0 + 37.5 + 1.5 = 93$$

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{93}{3-1} = 46.5$$

Anova範例(3/4)

範例13.1 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取6位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，三家加盟店的服務品質是否相同？

$$SSE = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2 = (6-1) \times 27.50 + (6-1) \times 8.00 + (6-1) \times 64.00 = 137.5 + 40.0 + 320.0 = 497.5$$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{SSE}{n_t - k} = \frac{497.5}{18 - 3} = 33.1667$$

$$F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{46.5}{33.1667} = 1.4020$$

E. 檢定統計值 $F = 1.4020 < \text{臨界值 } F_{\alpha, k-1, n_t-k} = 3.6823$ ，接受虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 。該速食連鎖餐廳A1、A2和A3三家加盟店的服務品質，彼此之間沒有達到顯著性的差異水準。

Anova範例(4/4)

範例13.1 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取6位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，三家加盟店的服務品質是否相同？

變異數分析表(ANOVA table)				
變異來源	平方和	自由度	均方	F值
樣本間變異	93	2	46.5	1.4020
樣本內變異	497.5	15	33.1667	
合計	590.5	17		

Excel資料分析

■ Excel

◆ 資料

□ 資料分析

■ 單因子變異數分析

■ 示範操作

輕鬆練習一下

此投影片播放後3分鐘內，沒有進入該練習卷者，老師即關閉
沒有進入者的練習卷(本練習10 分鐘內完成)

上課練習112ch13_1

13.3 多重比較程序

■ 變異數分析檢定 k 個母體平均值是否相等的過程

- ◆ 若判定拒絕虛無假設($H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ 所有母體平均值皆相等)，接受對立假設($H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等)時
- ◆ 更想知道的是哪些組合配對之間有達到顯著的差異水準，即在對立假設 $\mu_i \neq \mu_j$ 中， i 和 j 分別是屬於哪一個母體(s)。

事後比較和事前比較

■ 事後比較(Posteriori comparison)

- ◆ 當變異數分析達到顯著水準時，才針對 C_2^k 組合配對平均值比較，使用 F 檢定，以釐清不同母體之間平均值的實際差異情況，提供相關決策參考。

■ 事前比較(Priori comparison)

- ◆ 從 C_2^k 組合配對中取一對或數對組合，進行平均值比較或針對特定母體平均值進行估計，採用 t 檢定。
- ◆ 基於特定研究理論或特定需求所進行的平均數檢定，又稱計畫性比較。

13.3.2聯合信賴區間

- 變異數分析中有 k 個母體平均值，若欲進行分別1對1比較2個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ ($i \neq j$)的區間估計時，共有 C_2^k 種組合，若 C_2^k 種組合的信賴區間同時成立的信賴水準為 $(1 - \alpha)^{C_2^k}$ ，此信賴水準小於 $1 - \alpha$ 。
 - ◆ 欲進行數個平均值之差的信賴區間估計時，依據單一信賴區間的估計方式，恐會降低其可靠度。
- 必須使用多重比較程序進行母體平均值之差的聯合信賴區間。

常用的聯合信賴區間估算方法

- 費雪最低顯著差異法
- 薛費檢定法
- 鄧肯法
- 龐費洛尼法
- 杜凱法

13.3.2.1 費雪(Fisher's)最低顯著差異法

■ 變異數分析

◆ F 檢定的結果不顯著

- 虛無假設($H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$)成立
- 沒有必要進行多重比較程序；

◆ F 檢定的結果達顯著差異水準

- 拒絕虛無假設($H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$)，接受對立假設($H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等)時
- 才有必要進行多重比較程序。

三種方法(費雪最低顯著差異法)

t 值

- 檢定統計值： t 值
- 與臨界值比較後，進行統計推論

兩平均值差

- 檢定統計值：兩個樣本平均值之差取絕對值
- 與LSD比較後，進行統計推論

信賴區間

- 計算兩母體平均值之差的信賴區間
- 依據信賴區間有沒有包括數值0，進行統計推論

LSD(least significance difference procedure)檢定程序

A. 設定顯著水準 α 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_i = \mu_j$

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$

D. 檢定統計值— $t = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}}$

E. 左側臨界值 $-t_{\frac{\alpha}{2}, n-k} \leq$ 檢定統計值 $t \leq$ 右側臨界值 $t_{\frac{\alpha}{2}, n-k}$ ，判別接受虛無假設 $H_0: \mu_i = \mu_j$ 。

F. 檢定統計值 $t < -t_{\frac{\alpha}{2}, n-k}$ 或檢定統計值 $t > t_{\frac{\alpha}{2}, n-k}$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 。

LSD說明範例(1/6)

範例13.5 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用Fisher's LSD分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

題解： $k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量
樣本總數 $n_t = 18$
全部樣本平均值 $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j \times \bar{x}_j)}{n_t}$
$$\frac{5 \times 85.6 + 6 \times 93.0 + 7 \times 93.7}{18} = 91.22$$

樣本	加盟店A1	加盟店A2	加盟店A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準差	3.7815	2.8284	3.8607

LSD說明範例(2/6)

範例13.5 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**Fisher's LSD**分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 3-1, 18-3} = 3.6823(\text{F.INV})$

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 所有母體平均值皆相等

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等

D. 計算檢定統計值— F 值

$$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$$

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$$

LSD說明範例(3/6)

範例13.5 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**Fisher's LSD**分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

$$SSE = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 14.30 + (6-1) \times 8.00 + (7-1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{SSE}{n_t - k} = \frac{186.6}{18 - 3} = 12.4419$$

$$F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$$

E. 檢定統計值 $F = 8.8605 >$ 臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = 3.6823$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 。該速食連鎖餐廳A1、A2和A3三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

事後檢定1(4/6)

■ $\mu_1 - \mu_2$ 費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，左側臨界值 $-t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = -t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} = -$

2.1314(T.INV)；右側臨界值 $t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} = 2.1314$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 。

D. 檢定統計值：
$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{85.6 - 93.0}{\sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)}} = \frac{-7.4}{2.1359} = -3.4646$$

E. 檢定統計值 $t = -3.4646 < \text{左側臨界值} -t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = -2.1314$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 。

■ $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_2 = 93.0$ 。加盟店A2服務品質顯著性的高於加盟店A1。

事後檢定2(5/6)

■ $\mu_1 - \mu_3$ 費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$, 左側臨界值 $-t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = -t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} = -$

2.1314(T.INV) ; 右側臨界值 $t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} = 2.1314$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_3$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ 。

D. 檢定統計值：
$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_3}{\sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3} \right)}} = \frac{85.6 - 93.7}{\sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right)}} = \frac{-8.1}{2.0654} = -3.9218$$

E. 檢定統計值 $t = -3.9318 < \text{左側臨界值} -t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = -2.1314$, 接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ 。

□ $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_3 = 93.7$ 。 加盟店A3服務品質顯著性的高於加盟店A1 。

事後檢定3(6/6)

■ $\mu_2 - \mu_3$ 費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$, 左側臨界值 $-t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = -t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} = -$

2.1314(T.INV) ; 右側臨界值 $t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} = 2.1314$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_2 \neq \mu_3$ 。

D. 檢定統計值：
$$t = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_3}{\sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)}} = \frac{93.0 - 93.7}{\sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}} = \frac{-0.7}{1.9624} = -0.3640$$

E. 左側臨界值 $-t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = -2.1314 < \text{檢定統計值 } t = -0.3640 < \text{右側臨界值 } t_{0.025, 15} = 2.1314$, 判別接受虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ 。

□ 加盟店A2和加盟店A3服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

統計檢定值 $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ 費雪最低顯著差異法

A. 設定顯著水準 α 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_i = \mu_j$

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$

D. 檢定統計值： $|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$

E. 檢定統計值 $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \leq \text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$ ，判別接受虛無
假設 $H_0: \mu_i = \mu_j$

F. 檢定統計值 $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| > \text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$ ，判別接受對立
假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$

平均值差之LSD檢定程序範例(1/6)

範例13.6 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用檢定統計值 $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ 的費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

題解： $k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量

樣本總數 $n_t = 18$

$$\text{全部樣本平均值 } \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{428+558+656}{18} = 91.22$$

樣本	加盟店A1	加盟店A2	加盟店A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準差	3.7815	2.8284	3.8607

平均值差之LSD檢定程序範例(2/6)

範例13.6 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用檢定統計值 $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ 的費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 3-1, 18-3} = F_{0.05, 2, 15} = 3.6823(\text{F.INV})$

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 所有母體平均值皆相等

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等

D. 計算檢定統計值—F值

$$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$$

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$$

平均值差之LSD檢定程序範例(3/6)

範例13.6 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用檢定統計值 $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ 的費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

$$SSE = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 14.30 + (6-1) \times 8.00 + (7-1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{SSE}{n_t - k} = \frac{186.6}{18 - 3} = 12.4419$$

$$F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$$

E. 檢定統計值 $F = 8.8605 >$ 臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = 3.6823$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 。該速食連鎖餐廳A1、A2和A3三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

事後檢定1(4/6)

■ $\mu_1 - \mu_2$ 利用檢定統計值 $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ 的費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD) 檢定

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ °

C. 對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ °

D. 檢定統計值： $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |85.6 - 93.0| = |-7.4| = 7.4$

$$\square t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} = t_{0.025, 15} = 2.1314$$

$$\square \text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = 2.1314 \times \sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right)} = 2.1314 \times 2.1359 = 4.5525$$

E. 檢定統計值 $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = 7.4 > \text{LSD} = 4.5525$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ °

■ $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_2 = 93.0$ ° 加盟店A2服務品質顯著性的高於加盟店A1。

事後檢定2(5/6)

■ $\mu_1 - \mu_3$ 利用檢定統計值 $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ 的費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD) 檢定

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_3$ °

C. 對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ °

D. 檢定統計值： $|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = |85.6 - 93.7143| = |-8.1143| = 8.1143$

$$\blacksquare t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} = t_{0.025, 15} = 2.1314$$

$$\blacksquare \text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = 2.1314 \times \sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right)} = 2.1314 \times 2.0654 = 4.4022$$

E. $|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = 8.1143 > \text{LSD} = 4.4022$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ °

■ $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_3 = 93.7$ ° 加盟店A3服務品質顯著性的高於加盟店A1 °

事後檢定3(6/6)

■ $\mu_2 - \mu_3$ 利用檢定統計值 $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ 的費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$

B. 虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ °

C. 對立假設 $H_1: \mu_2 \neq \mu_3$ °

D. 檢定統計值： $|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |93.0 - 93.7143| = |-0.7143| = 0.7143$

$$\square t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} = t_{0.025, 15} = 2.1314$$

$$\square \text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = 2.1314 \times \sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right)} = 2.1314 \times 1.9624 = 4.1827$$

E. $|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = 0.7143 < \text{LSD} = 4.1827$ ，判別接受虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ °

■ 加盟店A2和加盟店A3服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

LSD推估兩母體平均值之差信賴區間

■ 利用費雪最低顯著差異法 (Fisher's least significance difference procedure) 估算兩母體平均值之差，在顯著水準 α 的信賴區間：

■ $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm \text{LSD}$

■ $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$

◆ 其中 $\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$

LSD信賴區間範例(1/6)

範例13.7 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用Fisher's LSD估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

題解： $k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量

樣本總數 $n_t = 18$

全部樣本平均值 $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} =$

$$\frac{\sum_{j=1}^k (n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{428 + 558 + 656}{18} = 91.22$$

樣本	加盟店A1	加盟店A2	加盟店A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準差	3.7815	2.8284	3.8607

LSD信賴區間範例(2/6)

範例13.7 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**Fisher's LSD**估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 3-1, 18-3} = F_{0.05, 2, 15} = 3.6823(\text{F.INV})$

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 所有母體平均值皆相等

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等

D. 計算檢定統計值— F 值

$$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$$

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$$

LSD信賴區間範例(3/6)

範例13.7 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**Fisher's LSD**估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

$$SSE = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 14.30 + (6-1) \times 8.00 + (7-1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{SSE}{n_t - k} = \frac{186.6}{18 - 3} = 12.4419$$

$$F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$$

E. 檢定統計值 $F = 8.8605 >$ 臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = 3.6823$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 。該速食連鎖餐廳A1、A2和A3三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

事後檢定1(4/6)

■ 利用費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm \text{LSD} = 7.4000 \pm 4.5525$

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{LSD} &= t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} \times \sqrt{12.4416 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right)} = 2.1314 \times \\ &2.1359 = 4.5525 \end{aligned}$$

E. 信賴區間未包括0，接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 。

■ $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_2 = 93.0$ 。加盟店A2服務品質顯著性的高於加盟店A1。

事後檢定2(5/6)

■ 利用費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_3$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm \text{LSD} = 8.1143 \pm 4.4022$

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{LSD} &= t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} \times \sqrt{12.4416 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right)} = 2.1314 \times \\ &2.0654 = 4.4022 \end{aligned}$$

E. 信賴區間未包括0，接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ 。

■ $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_3 = 93.7143$ 。加盟店A3服務品質顯著性的高於加盟店A1。

事後檢定3(6/6)

■ 利用費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_2 \neq \mu_3$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm \text{LSD} = 0.7143 \pm 4.1827$

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{LSD} &= t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} \times \sqrt{12.4416 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right)} = 2.1314 \times \\ &1.9624 = 4.1827 \end{aligned}$$

E. 信賴區間包括0，判別接受虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ 。

■ 加盟店A2和加盟店A3服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

輕鬆練習一下

此投影片播放後3分鐘內，沒有進入該練習卷者，老師即關閉
沒有進入者的練習卷(本練習10 分鐘內完成)

上課練習112ch13_2

13.3.2.2 薛費檢定法

■ 薛費檢定法(Scheffe's method)是由薛費(H. Scheff'e)於1959年提出一種是適用範圍相當廣泛的多重比較法，不論各組樣本數量相等或不相等皆可適用。

◆ 此法分析時對於分布常態性與變異一致性兩項假設之違反比較不敏感，而且犯型一錯誤機率較小。

■ 變異數分析有 k 個母體平均值，若欲進行分別1對1比較2個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ ($i \neq j$)，在顯著水準 α 的信賴區間估算：

$$\text{◆ } |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha, k-1, n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

薛費檢定法範例(1/6)

範例13.8 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**薛費檢定法 (Scheffe's method)**估算兩母體平均值之差的信賴區間，**分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？**

題解： $k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量

樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 18$

全部樣本平均值 $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} =$

$\frac{\sum_{j=1}^k (n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{428+558+656}{18} = 91.22$

樣本	加盟店A1	加盟店A2	加盟店A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準差	3.7815	2.8284	3.8607

薛費檢定法範例(2/6)

範例13.8 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用薛費檢定法(Scheffe's method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 3-1, 18-3} = F_{0.05, 2, 15} = 3.6823(\text{F.INV})$

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 所有母體平均值皆相等

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等

D. 計算檢定統計值—F值

$$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$$

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$$

薛費檢定法範例(3/6)

範例13.8 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**薛費檢定法 (Scheffe's method)**估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別**1對1配對比較**三家加盟店的服務品質是否相同？

$$SSE = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 14.30 + (6-1) \times 8.00 + (7-1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{SSE}{n_t - k} = \frac{186.6}{18 - 3} = 12.4419$$

$$F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$$

E. 檢定統計值 $F = 8.8605 >$ 臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = 3.6823$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 。該速食連鎖餐廳A1、A2和A3三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

事後檢定1(4/6)

■ 薛費檢定法(Scheffe's method)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 。

C. 對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha, k-1, n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$

$$= 7.4000 \pm 5.7964$$

$$\square F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 3-1, 18-3} = F_{0.05, 2, 15} = 3.6823$$

$$\square \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha, k-1, n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{(3-1) \times 3.6823} \times$$

$$\sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)} = 2.7138 \times 2.1359 = 5.7964$$

E. 信賴區間未包括0，接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 。

□ $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_2 = 93.0$ 。加盟店A2服務品質顯著性的高於加盟店A1。

事後檢定2(5/6)

■ 薛費檢定法(Scheffe's method)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_3$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha, k-1, n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)}$

$$= 8.1143 \pm 5.6050$$

$$\square F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 3-1, 18-3} = F_{0.05, 2, 15} = 3.6823$$

$$\square \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha, k-1, n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)} = \sqrt{(3-1) \times 3.6823} \times$$

$$\sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)} = 2.7138 \times 2.0654 = 5.6050$$

E. 信賴區間未包括0，接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ 。

□ $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_3 = 93.7143$ 。加盟店A3服務品質顯著性的高於加盟店A1。

事後檢定3(6/6)

■ 薛費檢定法(Scheffe's method)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_2 \neq \mu_3$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha, k-1, n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)}$

$$= 0.7143 \pm 5.3256$$

$$\square F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 3-1, 18-3} = F_{0.05, 2, 15} = 3.6823$$

$$\square \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha, k-1, n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)} = \sqrt{(3-1) \times 3.6823} \times$$

$$\sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)} = 2.7138 \times 1.9624 = 5.3256$$

E. 信賴區間包括0，判別接受虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ 。

■ 加盟店A2和加盟店A3服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

輕鬆練習一下

此投影片播放後3分鐘內，沒有進入該練習卷者，老師即關閉
沒有進入者的練習卷(本練習10 分鐘內完成)

上課練習112ch13_3

13.3.2.3 鄧肯法

- 鄧肯法或鄧肯氏法(Duncan method)是鄧肯(D.B. Duncan, 1955)提出的一種差距檢定法，必須使用特別的臨界值表。
- 變異數分析有 k 個母體平均值，若欲進行分別1對1比較2個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j (i \neq j)$

- $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm Q_{\alpha, k, v = n_t - k} \times \sqrt{\frac{MSE}{n}}$

- ◆ $n = n_i = n_j = n_k$ 各處理組的重複數量，若 $n_i \neq n_j$ 時，可利用所有處理組別重複數量的幾何平均值或調和平均值取代 n 值
- ◆ $Q_{\alpha, k, v = n_t - k}$ 查鄧肯法臨界值表
- ◆ $v = n_t - k$ 自由度
- ◆ k : 欲檢定的母體(平均值)之數量

鄧肯法範例(1/6)

範例13.9 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**鄧肯法**(Duncan method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，**分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？**

題解： $k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量

樣本總數 $n_t = 18$

全部樣本平均值 $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} =$

$$\frac{\sum_{j=1}^k (n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{428+558+656}{18} = 91.22$$

樣本	加盟店A1	加盟店A2	加盟店A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準差	3.7815	2.8284	3.8607

鄧肯法範例(2/6)

範例13.9 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**鄧肯法**(Duncan method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，**分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？**

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 3-1, 18-3} = 3.6823$ (F.INV)

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 所有母體平均值皆相等

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等

D. 計算檢定統計值— F 值

$$SSTR = \sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$$

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$$

鄧肯法範例(3/6)

範例13.9 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**鄧肯法**(Duncan method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，**分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？**

$$SSE = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 14.30 + (6-1) \times 8.00 + (7-1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{SSE}{n_t - k} = \frac{186.6}{18 - 3} = 12.4419$$

$$F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$$

E. 檢定統計值 $F = 8.8605 > \text{臨界值 } F_{\alpha, k-1, n_t-k} = 3.6823$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 。該速食連鎖餐廳A1、A2和A3三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

事後檢定1(4/6)

■ 鄧肯法估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm Q_{\alpha, k, v = n_t - k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 7.4000 \pm 4.7627$

$$\square Q_{\alpha, k, v = n_t - k} = Q_{0.05, 3, 18-3} = 3.160$$

$$\square n = \sqrt{n_1 \times n_2} = \sqrt{5 \times 6} = 5.4772$$

$$\square Q_{\alpha, k, v = n_t - k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.160 \times \sqrt{\frac{12.4419}{5.4772}} = 3.160 \times 1.5072 = 4.7627$$

E. 信賴區間未包括0，接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 。

$\square \bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_2 = 93.0$ 。加盟店A2服務品質顯著性的高於加盟店A1。

事後檢定2(5/6)

■ 鄧肯法估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_3$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha, k, v = n_t - k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 8.1143 \pm 4.5826$

$$\square Q_{\alpha, k, v = n_t - k} = Q_{0.05, 3, 18-3} = 3.160$$

$$\square n = \sqrt{n_1 \times n_3} = \sqrt{5 \times 7} = 5.9161$$

$$\square Q_{\alpha, k, v = n_t - k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.160 \times \sqrt{\frac{12.4419}{5.9161}} = 3.160 \times 1.4502 = 4.5826$$

E. 信賴區間未包括0，接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ 。

$\square \bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_3 = 93.7143$ 。加盟店A3服務品質顯著性的高於加盟店A1。

事後檢定3(6/6)

■ 鄧肯法估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_2 \neq \mu_3$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha, k, v = n_t - k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 0.7143 \pm 4.3784$

$$\square Q_{\alpha, k, v = n_t - k} = Q_{0.05, 3, 18-3} = 3.160$$

$$\square n = \sqrt{n_2 \times n_3} = \sqrt{6 \times 7} = 6.4807$$

$$\square Q_{\alpha, k, v = n_t - k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.160 \times \sqrt{\frac{12.4419}{6.4807}} = 3.160 \times 1.3856 = 4.3784$$

E. 信賴區間包括0，判別接受虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ 。

■ 加盟店A2和加盟店A3服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

輕鬆練習一下

此投影片播放後3分鐘內，沒有進入該練習卷者，老師即關閉
沒有進入者的練習卷(本練習10 分鐘內完成)

上課練習112ch13_4

13.3.2.4 龐費洛尼法

- 龐費洛尼法(Bonferroni method)類似於獨立樣本 t 檢定，針對 k 組資料的統計檢定時，欲將整體不犯型一錯誤機率維持在 $1 - \alpha$ 的水準之上，必須調整每次個別檢定的 α 值為 $\frac{\alpha}{C_2^k}$ 。
- 變異數分析中有 k 個母體平均值，有 $C_2^k = m$ 種母體平均值之差的配對方式，若欲進行分別1對1比較2個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ ($i \neq j$)，在顯著水準 α 的信賴區間估算：

$$\blacklozenge |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t - k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

□ $t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t - k}$ ：自由度等於 $n_t - k$ 的 t 分布右尾機率 $\frac{\alpha}{2m}$ 的臨界值

龐費洛尼法範例(1/6)

範例13.10 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行問卷評量，評量的結果如下：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**龐費洛尼法**估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

題解： $k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量
樣本總量 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 18$
全部樣本平均值 $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} =$
 $\frac{\sum_{j=1}^k (n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{428+558+656}{18} = 91.22$

樣本	加盟店A1	加盟店A2	加盟店A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準差	3.7815	2.8284	3.8607

龐費洛尼法範例(2/6)

範例13.10 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行問卷評量，評量的結果如下：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**龐費洛尼法**估算兩母體平均值之差的信賴區間，**分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同**？

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 3-1, 18-3} = 3.6823$ (F.INV)

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 所有母體平均值皆相等

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等

D. 計算檢定統計值— F 值

$$SSTR = \sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$$

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$$

龐費洛尼法範例(3/6)

範例13.10 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行問卷評量，評量的結果如下：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**龐費洛尼法**估算兩母體平均值之差的信賴區間，**分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？**

$$SSE = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 14.30 + (6-1) \times 8.00 + (7-1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{SSE}{n_t - k} = \frac{186.6}{18 - 3} = 12.4419$$

$$F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$$

E. 檢定統計值 $F = 8.8605 >$ 臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = 3.6823$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 。該速食連鎖餐廳A1、A2和A3三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

事後檢定1(4/6)

■ 龐費洛尼法估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t - k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = 7.4000 \pm 5.7536$

$$\square C_2^k = m = \frac{k!}{2! \times (k-2)!} = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = 3$$

$$\square t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t - k} = t_{\frac{0.05}{2 \times 3}, 18 - 3} = t_{0.00833, 15} = 2.6937$$

$$\square t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t - k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = 2.6937 \times \sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)} = 2.6937 \times 2.1359 = 5.7536$$

E. 信賴區間未包括0，接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 。

■ $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_2 = 93.0$ 。加盟店A2服務品質顯著性的高於加盟店A1。

事後檢定2(5/6)

■ 龐費洛尼法估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_3$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t - k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)} = 8.1143 \pm 5.5636$

$$\square C_2^k = m = \frac{k!}{2! \times (k-2)!} = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = 3$$

$$\square t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t - k} = t_{\frac{0.05}{2 \times 3}, 18 - 3} = t_{0.00833, 15} = 2.6937$$

$$\square t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t - k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)} = 2.6937 \times \sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)} = 2.6937 \times 2.0654 = 5.5636$$

E. 信賴區間未包括0，接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ 。

■ $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_3 = 93.7143$ 。加盟店A3服務品質顯著性的高於加盟店A1。

事後檢定3(6/6)

■ 龐費洛尼法估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_2 \neq \mu_3$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t - k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)} = 0.7143 \pm 5.2862$

$$\square C_2^k = m = \frac{k!}{2! \times (k-2)!} = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = 3$$

$$\square t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t - k} = t_{\frac{0.05}{2 \times 3}, 18 - 3} = t_{0.00833, 15} = 2.6937$$

$$\square t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t - k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)} = 2.6937 \times \sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)} = 2.6937 \times 1.9624 = 5.2862$$

E. 信賴區間包括0，接受虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ 。

■ 加盟店A2和加盟店A3服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

輕鬆練習一下

此投影片播放後3分鐘內，沒有進入該練習卷者，老師即關閉
沒有進入者的練習卷(本練習10 分鐘內完成)

上課練習112ch13_5

13.3.2.5 杜凱法

- 杜凱法是由費雪所建議，再由杜凱提出。
 - ◆ 進行平均值差距檢定時，不管其間層級的數量，以最多階次者為準，查表獲得其臨界值；由於判斷時所採用的臨界值數值比較大，平均值之間的差異不易達到顯著水準。
- 變異數分析有 k 個母體平均值，若欲進行分別1對1比較2個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ ($i \neq j$)，在顯著水準 α ， $\mu_i - \mu_j$ ($i \neq j$)的信賴區間：
- $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm Q_{\alpha, k, v = n_t - k} \times \sqrt{\frac{MSE}{n}}$
 - ◆ $n = n_i = n_j = n_k$ 各處理組的重複數量，若 $n_i \neq n_j$ 時，可利用所有處理組別重複數量的幾何平均值取代 n 值
 - ◆ $Q_{\alpha, k, v = n_t - k}$ 查杜凱表
 - ◆ $v = n_t - k$ 自由度
 - ◆ k : 欲檢定的母體數量

杜凱法範例(1/6)

範例13.11 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**杜凱法(Tukey method)**估算兩母體平均值之差的信賴區間，**分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？**

題解： $k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量

樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 18$

$$\text{全部樣本平均值 } \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{428+558+656}{18} = 91.22$$

樣本	加盟店A1	加盟店A2	加盟店A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準差	3.7815	2.8284	3.8607

杜凱法範例(2/6)

範例13.11 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**杜凱法(Tukey method)**估算兩母體平均值之差的信賴區間，**分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？**

- A.** 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 3-1, 18-3} = 3.6823$ (F.INV)
- B.** 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 所有母體平均值皆相等
- C.** 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等
- D.** 計算檢定統計值— F 值

$$SSTR = \sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$$

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$$

杜凱法範例(3/6)

範例13.11 九如速食連鎖餐廳有A1、A2和A3三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取5、6和7位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**杜凱法(Tukey method)**估算兩母體平均值之差的信賴區間，**分別1對1配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？**

$$SSE = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 14.30 + (6-1) \times 8.00 + (7-1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{SSE}{n_t - k} = \frac{186.6}{18 - 3} = 12.4419$$

$$F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$$

E. 檢定統計值 $F = 8.8605 >$ 臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = 3.6823$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 。該速食連鎖餐廳A1、A2和A3三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

事後檢定1(4/6)

■ 杜凱法估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm Q_{\alpha, k, v = n_t - k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 7.4000 \pm 5.5314$

$$\square Q_{\alpha, k, v = n_t - k} = Q_{0.05, 3, 18-3} = 3.67$$

$$\square n = \sqrt{n_1 \times n_2} = \sqrt{5 \times 6} = 5.4772 \text{ 幾何平均值}$$

$$\square Q_{\alpha, k, v = n_t - k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.67 \times \sqrt{\frac{12.4419}{5.4772}} = 3.67 \times 1.5072 = 5.5314$$

E. 信賴區間未包括0，接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 。

□ 因 $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_2 = 93.0$ 。加盟店A2服務品質顯著性的高於加盟店A1。

事後檢定2(5/6)

■ 杜凱法估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_3$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 8.1143 \pm 5.3222$

$$\square Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,18-3} = 3.67$$

$$\square n = \sqrt{n_1 \times n_3} = \sqrt{5 \times 7} = 5.9161$$

$$\square Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.67 \times \sqrt{\frac{12.4419}{5.9161}} = 3.67 \times 1.4502 = 5.3222$$

E. 信賴區間未包括0，接受對立假設 $H_1: \mu_1 \neq \mu_3$ 。

$\square \bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_3 = 93.7143$ 。加盟店A3服務品質顯著性的高於加盟店A1。

事後檢定3(6/6)

■ 杜凱法估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ 。

C. 對立假設 $H_1: \mu_2 \neq \mu_3$ 。

D. 計算信賴區間： $|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 0.7143 \pm 5.0852$

$$\square Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,18-3} = 3.67$$

$$\square n = \sqrt{n_2 \times n_3} = \sqrt{6 \times 7} = 6.4807$$

$$\square Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.67 \times \sqrt{\frac{12.4419}{6.4807}} = 3.67 \times 1.3856 = 5.0852$$

E. 信賴區間包括0，接受虛無假設 $H_0: \mu_2 = \mu_3$ 。

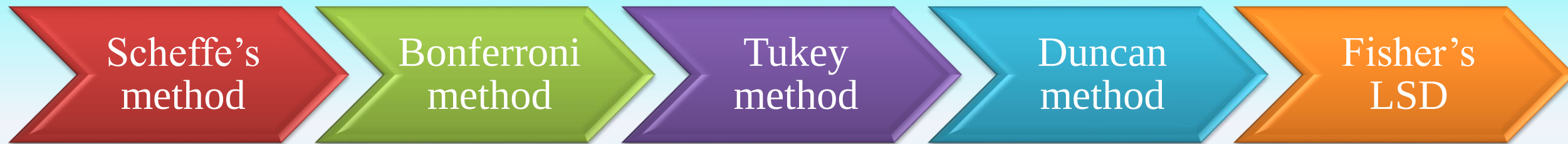
■ 加盟店A2和加盟店A3服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

各種事後檢定方法的信賴區間比較

事後檢定法	$\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間	$\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間	$\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間	信賴區間大小順序
費雪最低顯著差異法	7.4000 ± 4.5525	8.1143 ± 4.4022	0.7143 ± 4.1827	5
薛費檢定法	7.4000 ± 5.7964	8.1143 ± 5.6050	0.7143 ± 5.3256	1
鄧肯法	7.4000 ± 4.7627	8.1143 ± 4.5826	0.7143 ± 4.3784	4
龐費洛尼法	7.4000 ± 5.7536	8.1143 ± 5.5636	0.7143 ± 5.2862	2
杜凱法	7.4000 ± 5.5428	8.1143 ± 5.3598	0.7143 ± 5.0926	3

各種多重比較程序的比較

進行多重比較時，信賴區間的大小薛費檢定法(Scheffe's method) > 龐費洛尼法(Bonferroni method) > 杜凱法(Tukey method) > 鄧肯法(Duncan method) > 費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)。



信賴區間愈大者，愈容易將數值0納入信賴區間中，欲容易使配對比較後，判定不會達到顯著性差異水準。

多重比較程序的信賴區間

事後比較法	信賴區間
費雪最低顯著差異法	$ \bar{x}_i - \bar{x}_j \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n_t - k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$
薛費檢定法	$ \bar{x}_i - \bar{x}_j \pm \sqrt{(k - 1) \times F_{\alpha, k - 1, n_t - k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$
鄧肯法	$ \bar{x}_i - \bar{x}_j \pm Q_{\alpha, k, v = n_t - k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}}$
龐費洛尼法	$ \bar{x}_i - \bar{x}_j \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t - k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$
杜凱法	$ \bar{x}_i - \bar{x}_j \pm Q_{\alpha, k, v = n_t - k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}}$

輕鬆練習一下

此投影片播放後3分鐘內，沒有進入該練習卷者，老師即關閉
沒有進入者的練習卷(本練習10 分鐘內完成)

上課練習112ch13_6

13.4 試驗設計介紹

■ 實驗型研究中需先設定(規劃、操作)欲**探索**的**研究變數**，研究過程中**控制其他變數**，即可在較單純環境下，瞭解研究變數對**依變數**的**影響**。

◆ 連鎖速食餐廳為了提高備餐速度(效率)並期待可以減少工時(人事費用)，欲重新檢討廚房備餐流程之設計，請相關主管重新設計**4套**(處理 treatments)不同的**備餐流程(操作變數)**，為了驗證4套不同備餐流程的**備餐速度[目標(依)變數]**，欲實際驗證每套備餐流程，分別試驗一個星期的時間以估計其備餐速度。

研究變數



反應變數

相關名詞解釋

■ 實驗單位(experimental unit)

- ◆接受實驗觀察的對象，如特定商場(單位)、餐廳或特定遊憩區的消費者(人)[受測者]、產品、田地、農場。

■ 因子(factor)

- ◆能夠控制或調整的變數。例如：溫度、售價。

■ 水準(level)

- ◆單獨一個因子(factor)中各種可以區分的不同程度。例如：溫度30、40、50和60°C；售價30、40和50元。

■ 處理(treatment)

- ◆各種因子(一個或一個以上)個別水準的組合。溫度30°C、溫度40°C、溫度50°C；售價30元、售價40元、售價50元。

■ 反應變數(response variable)

- ◆實驗欲探索的目標變數(屬於依變數)

13.5完全隨機設計

- 完全隨機設計係指沒有區集設計的單因子實驗設計。
 - ◆ 將不同的處理水準以『隨機』的方式分派給實驗單位。
 - ◆ 透過隨機分派機制可以降低因為實驗單位的差異，導致對實驗結果的影響，單純呈現實驗變數對實驗結果的關係。
- 完全隨機設計使用於研究一個主要變數的影響，在實驗設計中無須考慮其他影響變數。
 - ◆ 設計比較主要研究變數之不同水準，對於實驗結果的影響。
- **全部實驗單位數量 = 水準數量 × 重複數量**
 - ◆ 珈珈連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料30、40和50元三種價格水準，採用4重複實驗設計，在該連鎖咖啡店中三種價格水準隨機性指派12家分店試賣1個月，蒐集此12家分店新咖啡飲料販售量，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。

假設檢定

■ 完全隨機設計假設欲研究的操作變數有 k 個處理(水準)，在每一個處理(水準)中的反應變數之平均值是否相等，其檢定的程序與「變異數分析：檢定 k 個母體平均值相等」章節中完全相同。

■ 假設檢定的通式：

◆ 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ 所有母體平均值皆相等

◆ 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j (i \neq j)$ 所有母體平均值不全部相等

□ μ_j : 第 j 個母體之平均值

□ k : 欲進行母體平均值檢定的母體數量

母體變異數之處理間估計值

■ 母體變異數 σ^2 在處理間之估計值稱為處理間均方(mean square due to treatment, **MSTR**)、組間變異數、因子變異數或處理間均方

■
$$\text{MSTR} = \frac{\sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{k-1} = \frac{\text{SSTR}}{k-1}$$

◆ $\sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{j=1}^k n_j \times \bar{x}_j^2 - n_t \times \bar{\bar{x}}^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$: 處理平方和(sum of squares due to treatment, **SSTR**)

◆ $k-1$: SSTR的自由度

母體變異數之處理內估計值

■ 母體變異數 σ^2 在處理內之估計值稱為誤差均方(mean square due to error, **MSE**)、隨機變異數或組內不偏變異數

■
$$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{\text{SSE}}{n_t - k}$$

◆ $\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$: 誤差平方和(sum of squares due to error, **SSE**)

◆ $n_t - k$: SSE的自由度

比較變異數的估算值：F檢定

■ 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ 成立，MSTR和MSE是兩個相互獨立的母體變異數 σ^2 不偏估計值。

◆ 母體特定研究變數屬於常態分布時，兩個相互獨立的母體變異數估計值屬於F分布。

◆ 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ 成立，變異數分析的假設亦成立時， $\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$ 是屬於分子自由度 $k - 1$ 與分母自由度 $n_t - k$ 的F分布。

■ 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ 不成立，MSTR數值會高估母體的變異數 σ^2 ， $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$ 會增加。

◆ $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$ 比值高於某一特定標準 $F_{\alpha, k-1, n_t-k}$ ，即可判定拒絕虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等。

■ 檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$

檢定統計值

■ 檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$

◆ 檢定統計值 $F \leq F_{\alpha, k-1, n_t-k}$ (臨界值) , 接受虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots =$

μ_k
◆ 檢定統計值 $F > F_{\alpha, k-1, n_t-k}$ (臨界值) , 接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等

完全隨機設計的ANOVA表

變異來源	平方和	自由度	均方	F值
樣本間變異	SSTR	$k - 1$	$MSTR = \frac{SSTR}{k - 1}$	$\frac{MSTR}{MSE}$
樣本內變異	SSE	$n_t - k$	$MSE = \frac{SSE}{n_t - k}$	
合計(Total)	SST	$n_t - 1$		

- 不同變異來源的平方和之加總，稱為**總平方和**(total sum of squares, **SST**)或**總變異**。
 - ◆ 總平方和(SST)的自由度($n_t - 1$)為樣本間變異的自由度和樣本內變異的自由度之和， $n_t - 1 = k - 1 + n_t - k$ 。
 - ◆ 總平方和**除**以其自由度，為**總樣本變異數**。
 - 可以視為暫時去除各種處理的分野，將所有觀測值皆視為同一組樣本。

完全隨機設計範例(1/6)

範例13.12 台北市K連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料30、40和50元三種價格水準，採用4重複實驗設計，在該連鎖咖啡店中三種價格水準隨機性指派12家分店試賣1個月，蒐集此12家分店新咖啡飲料販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，3個價格水準販售數量是否相同？

題解：k = 3欲進行母體平均值檢定的母體數量

$$\begin{aligned} \text{全部樣本平均值 } \bar{\bar{x}} &= \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{k \times n} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} \frac{x_{ij}}{n}}{\frac{k \times n}{n}} = \frac{\sum_{j=1}^k \bar{x}_j}{k} \\ &= \frac{2383.50 + 1917.25 + 1615.75}{3} = 1972.17 \end{aligned}$$

販售杯數	30元 ₁	40元 ₂	50元 ₃
分店	2012	1792	1595
分店	2385	1994	1698
分店	2452	1893	1892
分店	2685	1990	1278
樣本平均值 $\bar{x}$	2383.50	1917.25	1615.75
樣本變異數 S^2	77869.67	9152.92	65861.58
樣本標準差S	279.05	95.67	256.64

完全隨機設計範例(2/6)

範例13.12 台北市K連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料30、40和50元三種價格水準，採用4重複實驗設計，在該連鎖咖啡店中三種價格水準隨機性指派12家分店試賣1個月，蒐集此12家分店新咖啡飲料販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，3個價格水準販售數量是否相同？

- A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 3-1, 12-3} = 4.2565$ 。
- B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等
- C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等
- D. 計算檢定統計值： F 值

$$SSTR = \sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 4 \times (2383.50 - 1972.17)^2 + 4 \times (1917.25 - 1972.17)^2 + 4 \times (1615.75 - 1972.17)^2 = 676780.4 + 12063.4 + 508131.4 = 1196975.2$$

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{1196975}{3-1} = 598487.6$$

完全隨機設計範例(3/6)

範例13.12 台北市K連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料30、40和50元三種價格水準，採用4重複實驗設計，在該連鎖咖啡店中三種價格水準隨機性指派12家分店試賣1個月，蒐集此12家分店新咖啡飲料販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，3個價格水準販售數量是否相同？

$$SSE = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2 = (4 - 1) \times 77869.67 + (4 - 1) \times 9152.92 + (4 - 1) \times 65861.58 = 458652.5$$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{SSE}{n_t - k} = \frac{458652.5}{12 - 3} = 50961.4$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{598487.6}{50961.4} = 11.74$$

E. 檢定統計值 $F = 11.74 > \text{臨界值 } F_{\alpha, k-1, n_t-k} = 4.2565$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等。該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料30、40和50元三種價格水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

變異數分析表(4/6)

變異來源	平方和	自由度	均方	<i>F</i> 值
樣本間變異	1196975.2	2	598487.6	11.74
誤差	458652.5	9	50961.4	
合計	1655627.7	11		

費雪最低顯著差異法(5/6)

■ 費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定不同處理(價格水準)之間平均值相互比較是否相等。

◆ 在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，自由度 $n_t - k = 12 - 3 = 9$ ， $t_{\frac{\alpha}{2}, n_t - k} = t_{\frac{0.05}{2}, 12 - 3} = t_{0.025, 9} = 2.2622(\text{T.INV})$ 。

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{LSD} &= t_{\frac{\alpha}{2}, n_t - k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = 2.2622 \times \sqrt{50961.4 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)} \\ &= 361.1076 \end{aligned}$$

◆ 每一個處理(水準)的觀測(樣本)數量相同，故不同處理(水準)之間的費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定標準皆相同。

統計推論(6/6)

■ |定價30元 $\bar{x}_1$ – 定價40元 $\bar{x}_2$ | = |2383.50 – 1917.25| = 466.25 > LSD = 361.11

◆判定顯著差異

■ |定價30元 $\bar{x}_1$ – 定價50元 $\bar{x}_3$ | = |2383.50 – 1615.75| = 767.75 > LSD = 361.11

◆判定顯著差異

■ |定價40元 $\bar{x}_2$ – 定價50元 $\bar{x}_3$ | = |1917.25 – 1615.75| = 301.50 < LSD = 361.11

◆判定未顯著差異

■ 新咖啡飲料的定價以30元消費者購買數量最高，分別顯著性的高於定價40和50元者。

輕鬆練習一下

此投影片播放後3分鐘內，沒有進入該練習卷者，老師即關閉
沒有進入者的練習卷(本練習10 分鐘內完成)

上課練習112ch13_7

13.6隨機區集設計

- 隨機區集設計中使用一個會影響實驗結果的主要外在變數，如實驗單位(受測者)的年齡層、性別、收入等，將實驗單位區分成數個區集(blocks)。類似市場區隔概念，將實驗單位(受測者)分群比較分析。
 - ◆ 使用於將實驗單位區分為數個區集的變數特稱為區集變數(blocking variable)。
 - ◆ 隨機區集設計中可以鑑別和評量區集變數對實驗結果(依變數)的影響程度。
- 典型隨機區集設計的主要使用限制是只能控制一個外在變數，若有一個以上的外在變數需要控制時，必須使用拉丁方格設計或因子設計。

區集變數 (Blocking variable)	區集一(Block1)	實驗組(Experimental group)	R	T	O
		控制組(Control group)	R		O
	區集二(Block2)	實驗組(Experimental group)	R	T	O
		控制組(Control group)	R		O
	區集三(Block3)	實驗組(Experimental group)	R	T	O
		控制組(Control group)	R		O
	區集四(Block4)	實驗組(Experimental group)	R	T	O
		控制組(Control group)	R		O

隨機區集設計說明範例

- 連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，咖啡店的位置和大小與消費者的年齡、性別、收入、職業等皆會影響新咖啡飲料的消費意願。
- 依據文獻和實際觀察分析，選擇消費者收入為區集變數。
 - ◆ 消費者收入分為低收入(平均月收入NT\$20000元以下)、中收入(平均月收入NT\$20000~50000元)和高收入(平均月收入NT\$50001元以上)三個區集。
 - ◆ 實驗每杯30、40和50元三種價格水準，採用4重複實驗設計，在該連鎖咖啡店中三種價格水準隨機性指派12家分店試賣1個月，蒐集此12家分店新咖啡飲料分別對低收入、中收入和高收入消費者的販售量，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。

區集變數	區集	實驗變數：價格(元)											
		30				40				50			
消費者收入	低收入	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	中收入	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	高收入	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

統計檢定值

- 完全隨機設計檢定數個處理(水準)對於反應變數平均值的差異，皆是使用檢定統計值 F 值
- 檢定統計值 $F = \frac{MSTR}{MSE}$
 - ◆ 若有實驗未考慮的變數(外生變數)產生變異時，導致MSE數值變大， F 數值變小，在這種情況下，即使不同的處理(水準)之間有顯著性的差異，也無法透過 F 統計值的檢定，顯示出不同處理(水準)對於反應變數平均值的差異。
 - ◆ 隨機區集設計中期望能夠控制引起MSE發生變異的外生變數，並提供一個更佳的誤差變異數之估計法，使檢定不同處理(水準)對於反應變數平均值的差異更具效益。

隨機區集設計觀測值和平均值符號

		處理(treatments)					區集平均值
		T ₁	T ₂	T _{<i>j</i>}	...	T _{<i>k</i>}	
區集 (blocks)	Block 1	x ₁₁	x ₁₂	x _{1<i>j</i>}	...	x _{1<i>k</i>}	$\bar{x}_{1.}$
	Block 2	x ₂₁	x ₂₂	x _{2<i>j</i>}	...	x _{2<i>k</i>}	$\bar{x}_{2.}$
	Block <i>i</i>	x _{<i>i</i>1}	x _{<i>i</i>2}	x _{<i>i</i><i>j</i>}		x _{<i>i</i><i>k</i>}	$\bar{x}_{i.}$
	...	...	...		...	...	...
	Block <i>b</i>	x _{<i>b</i>1}	x _{<i>b</i>2}	x _{<i>b</i><i>j</i>}	...	x _{<i>b</i><i>k</i>}	$\bar{x}_{b.}$
處理平均值		$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$	$\bar{x}_{.j}$	...	$\bar{x}_{.k}$	$\bar{\bar{x}}$

- 特定觀測值與所有觀測值之平均值的總差異量數學符號表示
- $x_{ij} - \bar{\bar{x}} = (\bar{x}_{i.} - \bar{\bar{x}}) + (\bar{x}_{.j} - \bar{\bar{x}}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{\bar{x}})$

總變異

■ 將特定觀測值與所有觀測值之平均值的總差異量(上述)數學符號表示式取平方後，由於兩兩交叉相乘項和皆為0，可以獲得下列方程式：

$$\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} - \bar{x})^2$$

□ $\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x})^2$ ：總變異或總平方和(total sum of square, SST)，其自由度為 $b \times k - 1 = n_t - 1$

□ $\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2$ ：區集引起的變異或區集平方和(sum of square due to blocks, SSBL)，其自由度為 $b - 1$

□ $\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2$ ：處理引起的變異或處理平方和(sum of square due to treatments, SSTTR)，其自由度為 $k - 1$

□ $\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} - \bar{x})^2$ ：隨機變異或誤差平方和(sum of square due to error, SSE)，其自由度為 $b \times k - b - k + 1 = (b - 1) \times (k - 1)$

□ n_t ：全部樣本數($n_t = b \times k$)

◆ 自由度分別依序為 $n_t - 1 = (b - 1) + (k - 1) + (b - 1) \times (k - 1)$

總變異簡化標示

■ 將特定觀測值與所有觀測值之平均值的總差異量(上述)數學符號表示式取平方後，由於兩兩交叉相乘項和皆為0，可以獲得下列方程式：

$$\begin{aligned} \blacksquare \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 &= \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{i.} - \bar{\bar{x}})^2 + \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{.j} - \bar{\bar{x}})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{\bar{x}})^2 \end{aligned}$$

■ 上式可以簡化標示為：

$$\blacklozenge SST = SSBL + SSTR + SSE$$

$$\blacksquare SST = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\blacksquare SSBL = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{i.} - \bar{\bar{x}})^2 = k \times \sum_{i=1}^b (\bar{x}_{i.} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\blacksquare SSTR = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{.j} - \bar{\bar{x}})^2 = b \times \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{.j} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\blacksquare SSE = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{\bar{x}})^2 = SST - SSBL - SSTR$$

處理(水準)對反應變數影響之檢定程序

A. 設定顯著水準 α 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} = \mu_{.4} = \dots = \mu_{.k}$ 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等。

C. 對立假設 $H_1: \mu_{.i} \neq \mu_{.j}$ 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等。

D. 計算檢定統計值： $F\text{值} = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$

E. 檢定統計值 $F \leq$ 臨界值 $F_{\alpha, k-1, (k-1) \times (b-1)}$ ，接受虛無假設 $H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} = \mu_{.4} = \dots = \mu_{.k}$ 。

F. 檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha, k-1, (k-1) \times (b-1)}$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_{.i} \neq \mu_{.j}$ 。

區集對反應變數的影響之檢定程序

A. 設定顯著水準 α 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.} = \mu_{4.} = \dots = \mu_{b.}$ 所有區集之反應變數的母體平均值皆相等。

C. 對立假設 $H_1: \mu_{i.} \neq \mu_{j.}$ 所有區集之反應變數的母體平均值不全部相等。

D. 計算檢定統計值： $F\text{值} = \frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}}$

E. 檢定統計值 $F \leq$ 臨界值 $F_{\alpha, b-1, (k-1) \times (b-1)}$ ，接受虛無假設 $H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.} = \mu_{4.} = \dots = \mu_{b.}$ 。

F. 檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha, b-1, (k-1) \times (b-1)}$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_{i.} \neq \mu_{j.}$ 。

隨機區集設計的ANOVA表

變異來源	平方和	自由度	均方	F值
樣 本 間 變 異 (Treatments)	SSTR	$k - 1$	$MSTR = \frac{SSTR}{k - 1}$	$F = \frac{MSTR}{MSE}$
區集(Blocks)	SSBL	$b - 1$	$MSBL = \frac{SSBL}{b - 1}$	$F = \frac{MSBL}{MSE}$
誤差(Error)	SSE	$(k - 1) \times (b - 1)$	$MSE = \frac{SSE}{(k - 1) \times (b - 1)}$	
合計(Total)	SST	$n_t - 1$		

隨機區集設計範例(1/5)

範例13.13 純純連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯30、40、50和60元四種價格水準，在該連鎖咖啡店中四種價格水準隨機性指派4家分店試賣1個月，蒐集此4家分店新咖啡飲料分別對低收入、中收入和高收入消費者販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，4個價格水準販售數量是否相同？

		處理(水準)				區集和	區集平均值
		30元	40元	50元	60元		
區集	低收入	1502	1409	1325	1325	5561	1390.3
	中收入	1928	1968	1698	1352	6946	1736.5
	高收入	2567	2095	1845	1565	8072	2018.0
處理和		5997	5472	4868	4242	20579	
處理平均值		1999.0	1824.0	1622.7	1414.0		1714.9

隨機區集設計範例(2/5)

範例 12.12 結結浦銷咖啡店欲測試新咖啡飲料是否價格的市場接受度。實驗

題解：

處理(水準)對反應變數的影響之檢定

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, k-1, (k-1) \times (b-1)} = F_{0.05, 4-1, (4-1) \times (3-1)} = 4.7571(\text{F.INV.RT})$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$

D. 計算檢定統計值： F 值

$$\text{SST} = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = (1502 - 1714.9)^2 + (1409 - 1714.9)^2 + (1325 - 1714.9)^2 + (1325 - 1714.9)^2 + (1928 - 1714.9)^2 + (1968 - 1714.9)^2 + (1698 - 1714.9)^2 + (1352 - 1714.9)^2 + (2567 - 1714.9)^2 + (2095 - 1714.9)^2 + (1845 - 1714.9)^2 + (1565 - 1714.9)^2 = 1594345$$

$$\text{SSBL} = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{i.} - \bar{\bar{x}})^2 = k \times \sum_{i=1}^b (\bar{x}_{i.} - \bar{\bar{x}})^2 = 4 \times [(1390.3 - 1714.9)^2 + (1736.5 - 1714.9)^2 + (2018.0 - 1714.9)^2] = 790935.2$$

隨機區集設計範例(3/5)

範例13.13 純純連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯30、40、50和60元四種價格水準，在該連鎖咖啡店中四種價格水準隨

$$SSTR = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{.j} - \bar{\bar{x}})^2 = b \times \sum_{j=1}^k (\bar{x}_{.j} - \bar{\bar{x}})^2 = 3 \times [(1999.0 - 1714.9)^2 + (1824.0 - 1714.9)^2 + (1622.7 - 1714.9)^2 + (1414.0 - 1714.9)^2] = 574990.3$$

$$SSE = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{\bar{x}})^2 = SST - SSBL - SSTR = 1594345 - 790935.2 - 574990.3 = 228419.5$$

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{574990.3}{4-1} = 191663.4$$

$$MSE = \frac{SSE}{(k-1) \times (b-1)} = \frac{228419.5}{(4-1) \times (3-1)} = 38069.9$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{191663.4}{38069.9} = 5.0345$$

E. 檢定統計值 $F = 5.0345 >$ 臨界值 $F_{\alpha, k-1, (k-1) \times (b-1)} = 4.7571$ ，接受對立假設 H_1 : $\mu_i \neq \mu_j$ 。欲測試新咖啡飲料30、40、50和60元四種價格水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

區集對反應變數的影響之檢定(4/5)

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, b-1, (k-1) \times (b-1)} = F_{0.05, 3-1, (4-1) \times (3-1)} = F_{0.05, 2, 6} = 5.1433$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 。所有區集之反應變數的母體平均值皆相等。

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 。所有區集之反應變數的母體平均值不全部相等。

D. 計算檢定統計值： F 值

$$\text{◆ MSBL} = \frac{SSBL}{b-1} = \frac{790935.2}{3-1} = 395467.6$$

$$\text{◆ 檢定統計值 } F = \frac{MSBL}{MSE} = \frac{395467.6}{38069.9} = 10.3879$$

E. 檢定統計值 $F = 10.3879 >$ 臨界值 $F_{\alpha, b-1, (k-1) \times (b-1)} = 5.1433$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 。

◆ 欲測試新咖啡飲料在低收入、中收入和高收入三種區集的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

隨機區集設計變異數分析表(5/5)範例13.13

變異來源	平方和	自由度	均方	<i>F</i> 值
樣本間變異	574990.3	3	191663.4	5.0345
區集	790935.2	2	395467.6	10.3879
誤差	228419.5	6	38069.9	
合計	1594345	11		

輕鬆練習一下

此投影片播放後3分鐘內，沒有進入該練習卷者，老師即關閉
沒有進入者的練習卷(本練習10 分鐘內完成)

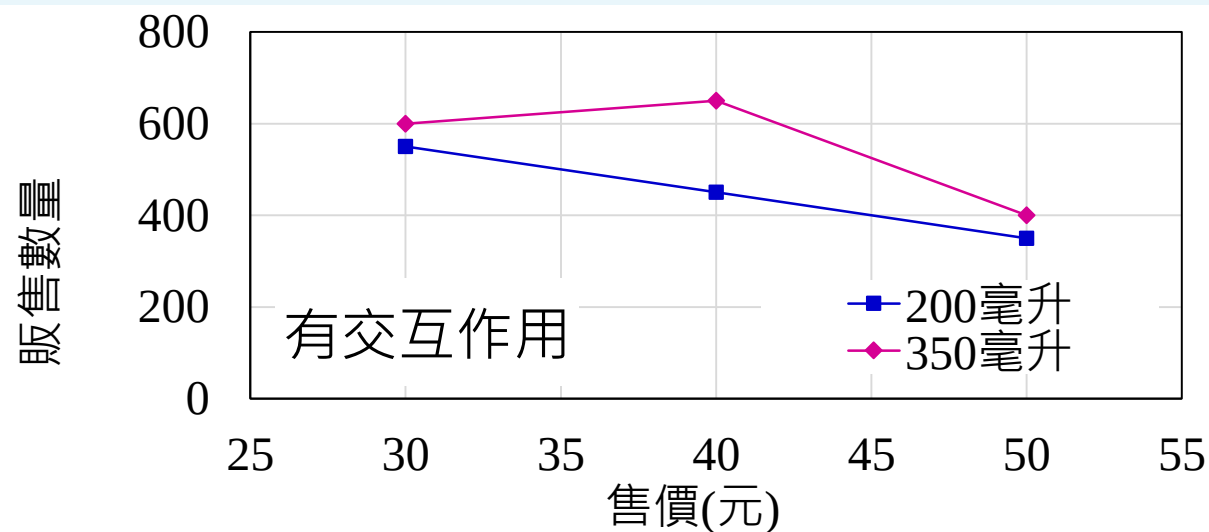
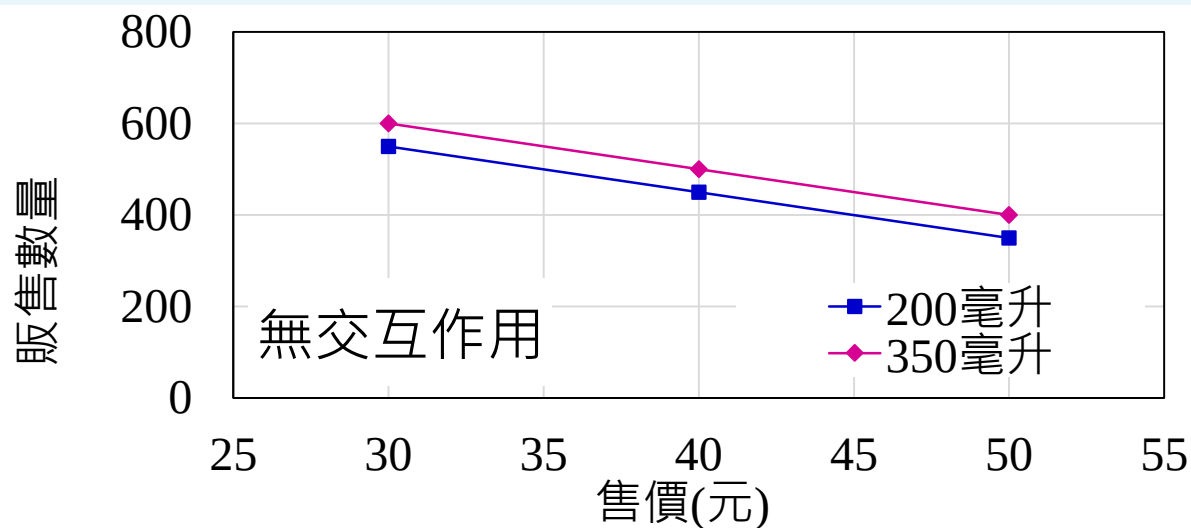
上課練習112ch13_8

13.7 因子試驗

- 完全隨機設計、隨機區集設計和拉丁方設計中，僅能評量一個實驗變數對實驗結果的影響。
- 若要同時評量兩個或兩個以上實驗變數對實驗結果的影響，即需要使用因子設計。
 - ◆ 二因子設計(two factorial design)是兩個實驗變數的實驗設計，又稱為二因子分類的實驗設計。
 - 二因子設計中有A和B兩個實驗變數，若其分別有a和b個水準，此設計可以稱為 $a \times b$ 二因子設計。
 - 實驗設計中需要有 $a \times b$ 種實驗水準的配對組合，每一個實驗水準的組合可以選擇重複或不重複執行於實驗單位。

交互作用

- 因子設計中可以評量各實驗變數對實驗結果的個別效果，其稱為**主要效果**(main effects)。
- 將各種實驗水準的配對組合重複的執行為實驗單位時，可以評量兩個實驗變數之間是否具有**交互作用**(interaction effects)或**交叉效果**(cross effects)。
 - ◆ **交互作用**是指其中一個實驗變數與實驗結果之間的關係型態，會受另一個實驗變數於不同水準而產生顯著的改變之情況。



3×2二因子設計

- 實驗每杯新咖啡飲料30、40和50元三種價格(實驗變數)與200和350 ml容量(實驗變數)水準，以評估此新咖啡飲料價格在台灣市場上的接受程度。
- 此範例屬於3×2二因子設計，從高雄市純純連鎖咖啡店中隨機抽出6個店為實驗單位，依據下表中隨機安排實驗單位的6種新咖啡飲料價格與容量組合，試賣一個月統計6家店分別販售新咖啡飲料的數量，以提供分析新咖啡飲料市場接受程度。

		價格		
		30元	40元	50元
容量	200 ml	R O	R O	R O
	350 ml	R O	R O	R O

3×2二因子設計三重複

- 實驗每杯新咖啡飲料30、40和50元三種價格(實驗變數)和200和350 ml容量(實驗變數)水準，以評估此新咖啡飲料價格在台灣市場上的接受程度。
- 此範例屬於3×2二因子設計，欲進行3重複實驗，從高雄市K連鎖咖啡店中隨機抽出18個店為實驗單位，依據下表中隨機安排實驗單位的六種新咖啡飲料價格與容量組合，試賣一個月統計18家店分別販售新咖啡飲料的數量，以提供分析新咖啡飲料市場接受程度。

		價格								
		30元			40元			50元		
容量	200 ml	R O	R O	R O	R O	R O	R O	R O	R O	R O
	350 ml	R O	R O	R O	R O	R O	R O	R O	R O	R O

二因子試驗

■ 13.7.1 無交互作用的二因子試驗變異數分析

◆ 無重複試驗

■ 13.7.2 交互作用的二因子試驗變異數分析

◆ 2個(含)以上的重複試驗

■ 在實驗中具有獨立性、常態性和變異數齊一性皆成立時，可以使用 F 分布進行假設檢定。

13.7.1無交互作用二因子試驗

在A和B二因子試驗中，若沒有進行重複試驗時，就不需要考慮交互作用的影響。

二因子分析實驗觀測值和平均值符號(無重複實驗)

		因子B(factor B)				因子A處理 平均值
		B ₁	B ₂	...	B _b	
因子A (factor A)	A ₁	x ₁₁	x ₁₂	...	x _{1b}	$\bar{x}_{1.}$
	A ₂	x ₂₁	x ₂₂	...	x _{2b}	$\bar{x}_{2.}$
	...	...	...	...	...	...
	A _a	x _{a1}	x _{a2}	...	x _{ab}	$\bar{x}_{a.}$
因子B處理平均值		$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$	...	$\bar{x}_{.b}$	$\bar{\bar{x}}$

特定觀測值 x_{ij} 與所有觀測值之平均值 $\bar{\bar{x}}$ 的總差異量數學符號表示

$$x_{ij} - \bar{\bar{x}} = (\bar{x}_{i.} - \bar{\bar{x}}) + (\bar{x}_{.j} - \bar{\bar{x}}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{\bar{x}})$$

總差異量平方後獲得總變異

■ 將特定觀測值與所有觀測值之平均值的總差異量(上述)數學符號表示式取平方後，由於兩兩交叉相乘項和皆為0，獲得下列方程式：

$$\blacklozenge \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2$$

■ $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x})^2$ ：總變異或總平方和(total sum of square, SST)，其自由度為 $a \times b - 1 = n_t - 1$

■ $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2$ ：因子A引起的變異或因子A平方和(sum of square due to treatment A, SSA)，其自由度為 $a - 1$

■ $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2$ ：因子B引起的變異或因子B平方和(sum of square due to treatments B, SSB)，其自由度為 $b - 1$

■ $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2$ ：隨機變異或誤差平方和(sum of square due to error, SSE)，其自由度為 $a \times b - a - b + 1 = (a - 1) \times (b - 1)$

■ n_t ：全部樣本數($n_t = a \times b$)

■ 自由度分別依序為 $n_t - 1 = (a - 1) + (b - 1) + (a - 1) \times (b - 1)$

總變異分解公式

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{\bar{x}})^2$$

上式可以簡化標示為：

$$SST = SSA + SSB + SSE$$

$$\text{其中 } SST = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$SSA = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2 = b \times \sum_{i=1}^a (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$SSB = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}})^2 = a \times \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$SSE = SST - SSA - SSB$$

因子A對反應變數的影響之檢定程序

A. 設定顯著水準 α 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.} = \mu_{4.} = \dots = \mu_{a.}$ 因子A所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等。

C. 對立假設 $H_1: \mu_{i.} \neq \mu_{j.}$ 因子A所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等。

D. 計算檢定統計值： $F\text{值} = \frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$

E. 檢定統計值 $F \leq$ 臨界值 $F_{\alpha, a-1, (a-1) \times (b-1)}$ ，接受虛無假設 $H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.} = \mu_{4.} = \dots = \mu_{a.}$ 。

F. 檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha, a-1, (a-1) \times (b-1)}$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_{i.} \neq \mu_{j.}$ 。

因子B對反應變數的影響之檢定程序

A. 設定顯著水準 α 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} = \mu_{.4} = \dots = \mu_{.b}$ 因子B所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等。

C. 對立假設 $H_1: \mu_{.i} \neq \mu_{.j}$ 因子B所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等。

D. 計算檢定統計值： $F\text{值} = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$

E. 檢定統計值 $F \leq$ 臨界值 $F_{\alpha, b-1, (a-1) \times (b-1)}$ ，接受虛無假設 $H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} = \mu_{.4} = \dots = \mu_{.b}$ 。

F. 檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha, b-1, (a-1) \times (b-1)}$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_{.i} \neq \mu_{.j}$ 。

二因子設計ANOVA table(無重複試驗)

變異來源	平方和	自由度	均方	F值
因子A	SSA	$a - 1$	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$\frac{MSA}{MSE}$
因子B	SSB	$b - 1$	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$\frac{MSB}{MSE}$
誤差	SSE	$(a - 1) \times (b - 1)$	$MSE = \frac{SSE}{(a-1) \times (b-1)}$	
合計	SST	$n_t - 1$		

隨機區集vs.二因子設計

隨機區集設計變異數分析表(ANOVA table)(k 個處理和 b 個區集)

變異來源	平方和	自由度	均方	F 值
樣本間變異	SSTR	$k - 1$	$MSTR = \frac{SSTR}{k - 1}$	$\frac{MSTR}{MSE}$
區集	SSBL	$b - 1$	$MSBL = \frac{SSBL}{b - 1}$	$\frac{MSBL}{MSE}$
誤差	SSE	$(k - 1) \times (b - 1)$	$MSE = \frac{SSE}{(k - 1) \times (b - 1)}$	
合計	SST	$n_t - 1$		

二因子設計變異數分析表(ANOVA table)(無重複試驗)

變異來源	平方和	自由度	均方	F 值
因子A	SSA	$a - 1$	$MSA = \frac{SSA}{a - 1}$	$\frac{MSA}{MSE}$
因子B	SSB	$b - 1$	$MSB = \frac{SSB}{b - 1}$	$\frac{MSB}{MSE}$
誤差	SSE	$(a - 1) \times (b - 1)$	$MSE = \frac{SSE}{(a - 1) \times (b - 1)}$	
合計	SST	$n_t - 1$		

二因子設計範例(無重複試驗)(1/5)

範例13.14 K連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料30、40、50和60元四種價格水準(實驗變數1)與200、350和500 ml容量水準(實驗變數2)，在該連鎖咖啡店中4種價格水準與3種容量水準，組合成12種配對方式，隨機性指派12家分店試賣1個月，蒐集此12家分店新咖啡飲料分別對200、350和500 ml容量的販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，4個價格水準販售數量是否相同？3個容量水準販售數量是否相同？

		售價				處理和	處理平均值 $\bar{x}_{1\sim3}$
		30元	40元	50元	60元		
容量	200 ml	1502	1425	1325	958	5210	1302.50
	350 ml	1655	1508	1396	1052	5611	1402.75
	500 ml	1805	1625	1565	1105	6100	1525.00
處理和		4962	4558	4286	3115		
處理平均值 $\bar{x}_{1\sim4}$		1654.00	1519.33	1428.67	1038.33		1410.08

二因子設計範例(無重複試驗)(2/5)

範例13.14 K連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料30、40、50和60元四種價格水準(實驗變數1)與200、350和500 ml容量水準(實驗變數2)，在該連鎖咖啡店由4種價格水準與3種容量水

題解：

新咖啡飲料**容量**對販售數量的影響之檢定

A.顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, a-1, (a-1) \times (b-1)} = F_{0.05, 3-1, (3-1) \times (4-1)} = 5.1433$

B.虛無假設 $H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.}$ 容量3種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等

C.對立假設 $H_1: \mu_{i.} \neq \mu_{j.}$ 容量3種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等

D.計算檢定統計值： F 值，容量水準數量 $a = 3$ ，售價水準數量 $b = 4$

$$SST = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = (1502 - 1410.08)^2 + \dots + (1105 - 1410.08)^2 = 737506.9167$$

$$SSA(\text{容量}) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{i.} - \bar{\bar{x}})^2 = b \times \sum_{i=1}^a (\bar{x}_{i.} - \bar{\bar{x}})^2 = 4 \times [(1302.50 - 1410.08)^2 + (1402.75 - 1410.08)^2 + (1525.00 - 1410.08)^2] = 99335.1667$$

二因子設計範例(無重複試驗)(3/5)

範例13.14 K連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每

$$SSB(\text{售價}) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{.j} - \bar{\bar{x}})^2 = a \times \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{.j} - \bar{\bar{x}})^2 = 3 \times [(1654.00 - 1410.08)^2 + (1519.33 - 1410.08)^2 + (1428.67 - 1410.08)^2 + (1038.33 - 1410.08)^2] = 629922.9167$$

$$SSE = SST - SSA - SSB = 737506.9167 - 99335.1667 - 629922.9167 = 8248.8333$$

$$MSA(\text{容量}) = \frac{SSA}{a-1} = \frac{99335.1667}{3-1} = 49667.58$$

$$MSB(\text{售價}) = \frac{SSB}{b-1} = \frac{629922.9167}{4-1} = 209974.3$$

$$MSE = \frac{SSE}{(a-1) \times (b-1)} = \frac{8248.8333}{(3-1) \times (4-1)} = 1374.806$$

$$\text{檢定統計值 } F(\text{容量}) = \frac{MSA}{MSE} = \frac{49667.58}{1374.806} = 36.1270$$

E. 檢定統計值 $F = 36.1270 > \text{臨界值 } F_{\alpha, a-1, (a-1) \times (b-1)} = 5.1433$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_{i.} \neq \mu_{j.}$ 容量3種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

售價對販售數量影響之檢定(4/5)

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, b-1, (a-1) \times (b-1)} = F_{0.05, 4-1, (3-1) \times (4-1)} = 4.7571$ (F.INV.RT)。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} = \mu_{.4}$ 售價4種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C. 對立假設 $H_1: \mu_{.i} \neq \mu_{.j}$ 售價4種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D. 計算檢定統計值： $F(\text{售價}) = \frac{MSB}{MSE} = \frac{209974.3}{1374.806} = 152.7302$

E. 檢定統計值 $F = 152.7302 >$ 臨界值 $F_{\alpha, b-1, (a-1) \times (b-1)} = 4.7571$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_{.i} \neq \mu_{.j}$ 。

◆ 欲測試新咖啡飲料30、40、50和60元四種價格水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

容量×售價二因子變異數分析表(5/5)

變異來源	平方和	自由度	均方	<i>F</i> 值
容量	99335.167	2	49667.58	36.1270
售價	629922.917	3	209974.31	152.7302
誤差	8248.833	6	1374.81	
合計	737506.917	11		

Excel資料分析

■ Excel

◆ 資料

□ 資料分析

■ 雙因子變異數分析：無重複試驗

■ 示範操作

輕鬆練習一下

此投影片播放後3分鐘內，沒有進入該練習卷者，老師即關閉
沒有進入者的練習卷(本練習10 分鐘內完成)

上課練習112ch13_9

13.7.2交互作用二因子試驗變異數分析

在A和B二因子試驗中，若欲評估兩因子之間的交互作用時，在每一個試驗組合皆必須至少執行2個(含)以上的重複試驗。

二因子分析實驗觀測值和平均值符號(*r*次重複實驗)

		因子B(factor B)				因子A處理 平均值
		B ₁	B ₂	...	B _b	
因子A (factor A)	A ₁	x ₁₁₁ x ₁₁₂ ⋮ x _{11r} $\bar{x}_{11\cdot}$	x ₁₂₁ x ₁₂₂ ⋮ x _{12r} $\bar{x}_{12\cdot}$	...	x _{1b1} x _{1b2} ⋮ x _{1br} $\bar{x}_{1b\cdot}$	$\bar{x}_{1\cdot\cdot}$
	A ₂	x ₂₁₁ x ₂₁₂ ⋮ x _{21r} $\bar{x}_{21\cdot}$	x ₂₂₁ x ₂₂₂ ⋮ x _{22r} $\bar{x}_{22\cdot}$	...	x _{2b1} x _{2b2} ⋮ x _{2br} $\bar{x}_{2b\cdot}$	$\bar{x}_{2\cdot\cdot}$
	...	...	...	...	...	...
	A _a	x _{a11} x _{a12} ⋮ x _{a1r} $\bar{x}_{a1\cdot}$	x _{a21} x _{a22} ⋮ x _{a2r} $\bar{x}_{a2\cdot}$	...	x _{ab1} x _{ab2} ⋮ x _{abr} $\bar{x}_{ab\cdot}$	$\bar{x}_{a\cdot\cdot}$
	因子B處理平均值	$\bar{x}_{\cdot 1\cdot}$	$\bar{x}_{\cdot 2\cdot}$	...	$\bar{x}_{\cdot b\cdot}$	$\bar{\bar{x}}$

特定觀測值x_{ijk}與所有觀測值之平均值 $\bar{\bar{x}}$ 的總差異量數學符號表示

$$x_{ijk} - \bar{\bar{x}} = (\bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{\bar{x}}) + (\bar{x}_{\cdot j\cdot} - \bar{\bar{x}}) + (\bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}_{\cdot j\cdot} + \bar{\bar{x}}) + (x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot})$$

總差異量平方後獲得總變異

■ 將特定觀測值 x_{ijk} 與所有觀測值之平均值 $\bar{x}$ 的總差異量(上述)數學符號表示式取平方後，由於兩兩交叉相乘項和皆為0，可以獲得下列方程式：

$$\begin{aligned} \blacklozenge \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (x_{ijk} - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2 \end{aligned}$$

□ $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (x_{ijk} - \bar{x})^2$ ：總變異或總平方和(total sum of square, SST)，其自由度為 $a \times b - 1 = n_t - 1$

□ $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2$ ：因子A引起的變異或因子A平方和(sum of square due to treatment A, SSA)，其自由度為 $a - 1$

□ $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2$ ：因子B引起的變異或因子B平方和(sum of square due to treatments B, SSB)，其自由度為 $b - 1$

□ $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2$ ：因子A和因子B交互影響的變異SSAB，其自由度為 $(a - 1) \times (b - 1)$

□ $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2$ ：隨機變異或誤差平方和(sum of square due to error, SSE)，其自由度為 $a \times b \times (r - 1) = a \times b \times r - a \times b$

□ r ：重複次數

□ n_t ：全部樣本數($n_t = a \times b \times r$)自由度分別依序為 $n_t - 1 = (a - 1) + (b - 1) + (a - 1) \times (b - 1) + a \times b \times (r - 1)$

上式可以簡化標示

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (x_{ijk} - \bar{\bar{x}})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{i..} - \bar{\bar{x}})^2 + \\ &\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{\bar{x}})^2 + \\ &\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2 \end{aligned}$$

簡化標示

$$\text{SST} = \text{SSA} + \text{SSB} + \text{SSAB} + \text{SSE}$$

其中 $\text{SST} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (x_{ijk} - \bar{\bar{x}})^2$

$$\text{SSA} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{i..} - \bar{\bar{x}})^2 = b \times r \times \sum_{i=1}^a (\bar{x}_{i..} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\text{SSB} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}})^2 = a \times r \times \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\text{SSAB} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{\bar{x}})^2 = r \times \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{\bar{x}})^2$$

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r x_{ijk}^2 - r \times \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \bar{x}_{ij.}^2$$

$$\text{SSE} = \text{SST} - \text{SSA} - \text{SSB} - \text{SSAB}$$

因子A對反應變數的影響之檢定程序

A. 設定顯著水準 α 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_{1..} = \mu_{2..} = \mu_{3..} = \mu_{4..} = \dots = \mu_{a..}$ 因子A所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等。

C. 對立假設 $H_1: \mu_{i..} \neq \mu_{j..}$ 因子A所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等。

D. 計算檢定統計值： $F\text{值} = \frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$

E. 檢定統計值 $F \leq$ 臨界值 $F_{\alpha, a-1, a \times b \times (r-1)}$ ，接受虛無假設 $H_0: \mu_{1..} = \mu_{2..} = \mu_{3..} = \mu_{4..} = \dots = \mu_{a..}$ 。

F. 檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha, a-1, a \times b \times (r-1)}$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_{i..} \neq \mu_{j..}$ 。

因子B對反應變數的影響之檢定程序

A. 設定顯著水準 α 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_{.1.} = \mu_{.2.} = \mu_{.3.} = \mu_{.4.} = \dots = \mu_{.b.}$ 因子B所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等。

C. 對立假設 $H_1: \mu_{.i.} \neq \mu_{.j.}$ 因子B所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等。

D. 計算檢定統計值： $F\text{值} = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$

E. 檢定統計值 $F \leq$ 臨界值 $F_{\alpha, b-1, a \times b \times (r-1)}$ ，接受虛無假設 $H_0: \mu_{.1.} = \mu_{.2.} = \mu_{.3.} = \mu_{.4.} = \dots = \mu_{.b.}$ 。

F. 檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha, b-1, a \times b \times (r-1)}$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_{.i.} \neq \mu_{.j.}$ 。

因子A和B對反應變數交互影響檢定程序

A. 設定顯著水準 α 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_{ij\cdot} = \mu_{ij\cdot}$ A和B因子所有處理(水準)對反應變數的母體平均值無交互作用。

C. 對立假設 $H_1: \mu_{ij\cdot} \neq \mu_{ij\cdot}$ A和B因子所有處理(水準)對反應變數的母體平均值有交互作用。

D. 計算檢定統計值： $F\text{值} = \frac{MSAB}{MSE}$

E. 檢定統計值 $F \leq$ 臨界值 $F_{\alpha, (a-1) \times (b-1), a \times b \times (r-1)}$ ，接受虛無假設 $H_0: \mu_{ij\cdot} = \mu_{ij\cdot}$ 。

F. 檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha, (a-1) \times (b-1), a \times b \times (r-1)}$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_{ij\cdot} \neq \mu_{ij\cdot}$ 。

二因子設計ANOVA table(r 次重複實驗)

變異來源	平方和	自由度	均方	F 值
因子A	SSA	$a - 1$	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$\frac{MSA}{MSE}$
因子B	SSB	$b - 1$	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$\frac{MSB}{MSE}$
交互作用	SSAB	$(a - 1) \times (b - 1)$	$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1) \times (b-1)}$	$\frac{MSAB}{MSE}$
誤差(Error)	SSE	$a \times b \times (r - 1)$	$MSE = \frac{SSE}{a \times b \times (r-1)}$	
合計(Total)	SST	$n_t - 1$		

3×2二因子設計範例(1/7)

範例13.16 台北市K連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料30、40、50和60元四種價格水準(實驗變數1)與200、350和500 ml容量水準(實驗變數2)，欲進行3重複實驗，在該連鎖咖啡店中四種價格水準隨機性的指派36家分店試賣1個月，蒐集此36家分店新咖啡飲料分別對200、350和500 ml容量的販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，4個價格水準販售數量是否相同？

		售價				處理和	處理平 均值
		30元	40元	50元	60元		
容量	200 ml	1502	1425	1325	958	15477	1289.8
		1594	1495	1495	850		
		1625	1356	1200	652		
		1573.7	1425.3	1340.0	820.0		
	350 ml	1655	1508	1396	1052	16842	1403.5
		1752	1526	1456	959		
		1652	1495	1495	896		
		1686.3	1509.7	1449.0	969.0		
	500 ml	1805	1625	1565	1105	18388	1532.3
		1795	1758	1499	1250		
		1746	1525	1567	1148		
		1782.0	1636.0	1543.7	1167.7		
處理和		15126	13713	12998	8870		
處理平均值		1680.7	1523.7	1444.2	985.6		1408.5

3×2二因子設計範例(2/7)

範例13.16 台北市K連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料30、40、50和60元四種價格水準(實驗變數1)與200、350和500 ml容量水準(實驗變數2)，欲進行3重複實驗，在該連鎖咖啡店中四種價格水準隨機性的指派26家分店試賣1個日，蒐集此26家分店新咖啡飲料分別對200、350和

題解：

新咖啡飲料**容量**對販售數量的影響之檢定

- A. 顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, a-1, a \times b \times (r-1)} = F_{0.05, 3-1, 3 \times 4 \times (3-1)} = 3.4028$
- B. 虛無假設 $H_0: \mu_{1..} = \mu_{2..} = \mu_{3..}$ 容量3種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等
- C. 對立假設 $H_1: \mu_{i..} \neq \mu_{j..}$ 容量3種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等
- D. 計算檢定統計值： F 值

容量的水準數 $a = 3$ ，售價的水準數 $b = 4$ ，試驗的重複數 $r = 3$

$$SST = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (x_{ijk} - \bar{\bar{x}})^2 = (1502 - 1408.5)^2 + (1594 - 1408.5)^2 + \dots + (1250 - 1408.5)^2 + (1148 - 1408.5)^2 = 2962551$$

$$SSA(\text{容量}) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{i..} - \bar{\bar{x}})^2 = b \times r \times \sum_{i=1}^a (\bar{x}_{i..} - \bar{\bar{x}})^2 = 4 \times 3 \times [(1289.8 - 1408.5)^2 + (1403.5 - 1408.5)^2 + (1532.3 - 1408.5)^2] = 353535.1$$

3×2二因子設計範例(3/7)

範例13.16 台北市K連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每

$$SSB(\text{售價}) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}})^2 = a \times r \times \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}})^2 = 3 \times 3 \times [(1680.7 - 1408.5)^2 + (1523.7 - 1408.5)^2 + (1444.2 - 1408.5)^2 + (985.6 - 1408.5)^2] = 2407465$$

$$SSAB(\text{容量} \times \text{售價}) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{\bar{x}})^2 = r \times \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{\bar{x}})^2 = 3 \times [(1573.7 - 1289.8 - 1680.7 + 1408.5)^2 + (1425.3 - 1289.8 - 1523.7 + 1408.5)^2 + \dots + (1543.7 - 1532.3 - 1444.2 + 1408.5)^2 + (1167.7 - 1532.3 - 985.6 + 1408.5)^2] = 24030.7$$

$$SSE = SST - SSA - SSB - SSAB = 2962551 - 353535.1 - 2407465 - 24030.7 = 177520$$

$$MSA(\text{容量}) = \frac{SSA}{a-1} = \frac{353535.1}{3-1} = 176767.5$$

$$MSB(\text{售價}) = \frac{SSB}{b-1} = \frac{2407465}{4-1} = 802488.4$$

$$MSAB(\text{容量} \times \text{售價}) = \frac{SSAB}{(a-1) \times (b-1)} = \frac{24030.7}{(3-1) \times (4-1)} = 4005.12$$

$$MSE = \frac{SSE}{a \times b \times (r-1)} = \frac{177520}{3 \times 4 \times (3-1)} = 7396.667$$

$$F(\text{容量}) = \frac{MSA}{MSE} = \frac{176767.5}{7396.667} = 23.8983$$

3×2二因子設計範例(4/7)

範例13.16 台北市K連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料30、40、50和60元四種價格水準(實驗變數1)與200、350和500 ml容量水準(實驗變數2)，欲進行3重複實驗，在該連鎖咖啡店中四種價格水準隨機性的指派36家分店試賣1個月，蒐集此36家分店新咖啡飲料分別對200、350和

$$MSA(\text{容量}) = \frac{SSA}{a-1} = \frac{353535.1}{3-1} = 176767.5$$

$$MSB(\text{售價}) = \frac{SSB}{b-1} = \frac{2407465}{4-1} = 802488.4$$

$$MSAB(\text{容量} \times \text{售價}) = \frac{SSAB}{(a-1) \times (b-1)} = \frac{24030.7}{(3-1) \times (4-1)} = 4005.12$$

$$MSE = \frac{SSE}{a \times b \times (r-1)} = \frac{177520}{3 \times 4 \times (3-1)} = 7396.667$$

$$F(\text{容量}) = \frac{MSA}{MSE} = \frac{176767.5}{7396.667} = 23.8983$$

E. 檢定統計值 $F = 23.8983 > \text{臨界值 } F_{\alpha, a-1, a \times b \times (r-1)} = 3.4028$ 。接受對立假設 $H_1: \mu_{i..} \neq \mu_{j..}$ 。容量3種處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等。欲測試新咖啡飲料200、350和500 ml三種容量水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

售價對販售數量的影響之檢定(5/7)

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, b-1, a \times b \times (r-1)} = F_{0.05, 4-1, 3 \times 4 \times (3-1)} = 3.0088$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_{.1.} = \mu_{.2.} = \mu_{.3.} = \mu_{.4.}$ 售價4種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C. 對立假設 $H_1: \mu_{.i.} \neq \mu_{.j.}$ 售價4種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D. 計算檢定統計值： $F(\text{售價}) = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} = \frac{802488.4}{7396.7} = 108.4932$

E. 檢定統計值 $F = 108.4932 >$ 臨界值 $F_{\alpha, b-1, a \times b \times (r-1)} = 3.0088$ ，接受對立假設 $H_1: \mu_{.i.} \neq \mu_{.j.}$ 。

◆ 欲測試新咖啡飲料30、40、50和60元四種價格水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

容量與售價對販售數量的交互影響檢定

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, (a-1) \times (b-1), a \times b \times (r-1)} = F_{0.05, (3-1) \times (4-1), 3 \times 4 \times (3-1)} = 2.5082$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_{ij.} = \mu_{ij.}$ 不同售價與容量組合處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等(售價與容量無交互作用)。

C. 對立假設 $H_1: \mu_{ij.} \neq \mu_{ij.}$ 不同售價與容量組合處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等(售價與容量有交互作用)。

D. 計算檢定統計值： $F(\text{容量} \times \text{售價}) = \frac{MSAB}{MSE} = \frac{4005.12}{7396.7} = 0.5415$

E. 檢定統計值 $F = 0.5415 < \text{臨界值 } F_{\alpha, (a-1) \times (b-1), a \times b \times (r-1)} = 2.5082$ ，接受虛無假設 $H_0: \mu_{ij.} = \mu_{ij.}$ 。

◆ 欲測試新咖啡飲料價格與容量對於販售數量沒有交互作用。

容量×售價二因子變異數分析表(7/7)

變異來源	平方和	自由度	均方	<i>F</i> 值
容量	353535	2	176767.5	23.8983
售價	2407465	3	802488.4	108.4932
交互作用	24031	6	4005.1	0.5415
誤差	177520	24	7396.7	
合計	2962551	35		

Excel資料分析

■ Excel

◆ 資料

□ 資料分析

■ 雙因子變異數分析：重複試驗

◆ 欄列【水準】必須圈入

■ 示範操作

輕鬆練習一下

此投影片播放後3分鐘內，沒有進入該練習卷者，老師即關閉
沒有進入者的練習卷(本練習10 分鐘內完成)

上課練習112ch13_10

討論議題：因子試驗應用

- 第一回合請於D+3日中午12點以前從「議題討論」區【張貼】標題：「應用情境」，本文：請針對第13章學習的【因子試驗】課程內容，具體陳述您現在或未來最想運用到情境，並明確標示出兩個(或以上)自變數(名目尺度或順序尺度)和一個依變數(區間尺度或比例尺度)的名稱(20個字以上)。
 - ◆待有30篇第一回合【張貼】回應後或第一回合【張貼】時間結束後，請詳細檢視其他同學的回應內容。
- 第二回合【張貼】標題：「最佳詮釋」，本文：哪一位同學詮釋得最具體與明確，請說明理由或者有哪些是值得讓自己學習之處？(20個字以上)。
 - ◆第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

先使用『來賓練習』熟習課程內涵

正式平常考每一題留下運算檔案

匡列足夠時間，一次登入，一口氣完成，一次繳交

關閉時間：D+3日2359

平常考112ch13

您辛苦了

第十三章課程結束

複習1

- 「好歌聲」主辦單位將分搖滾、抒情、RAP、創作曲等四種類型的歌曲選拔優勝者，由3位評審分別給分。每類歌曲都有10位參賽者，最後以每位參賽者在3位評審的總分高低來決定入圍人選。
- 主辦單位想以變異數分析，了解評審打分是否有差異，不同類型的歌曲分數是否有差異。製作的ANOVA表中，評審之自由度為何？

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F值
因子A	SSA	$a - 1$	$MSA = \frac{SSA}{a - 1}$	$F = \frac{MSA}{MSE}$
因子B	SSB	$b - 1$	$MSB = \frac{SSB}{b - 1}$	$F = \frac{MSB}{MSE}$
樣本內變異、組內或誤差	SSE	$(a - 1) \times (b - 1)$	$MSE = \frac{SSE}{(a - 1) \times (b - 1)}$	
合計	SST	$n_t - 1$		

複習1：題解

- 針對評審的差異性，欲進行分析時，其自由度就是評審數量(a) - 1 = 3 - 1 = 2
- 針對不同類型歌曲的差異性，欲進行分析時，其自由度就是歌曲類型數量(b) - 1 = 4 - 1 = 3
- 誤差項的自由度 = $(a - 1) \times (b - 1) = (\text{評審數量} - 1) \times (\text{歌曲類型} - 1) = (3 - 1) \times (4 - 1) = 2 \times 3 = 6$
- 全部的自由度 = $n_t - 1 = \text{評審需要評分的全部歌曲數量} - 1 = 3 \times 4 - 1 = 12 - 1 = 11$
 - ◆ 答案：評審之自由度【2】；歌曲類型之自由度【3】；誤差項之自由度【6】；全部之自由度【11】

複習2

■ 2016年某拖網漁船以三種網目大小所捕獲每網次海蝦重量如下表，假設此三組樣本資料所來自的母全體為常態分布且變異數皆相同，請以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 檢定網目大小對漁獲量(海蝦重量)有無影響。

	網目		
	1公分	3公分	5公分
漁獲量(公斤)	106	100	87
	120	94	82
	110	118	85
	100	122	90

複習2：題解

	網目		
	1公分	3公分	5公分
漁獲量(公斤)	106	100	87
	120	94	82
	110	118	85
	100	122	90
平均值	109.0	108.5	86.0
變異數	70.6667	185.0000	11.3333
標準差	8.4063	13.6015	3.3665

- 設 μ_1 、 μ_2 和 μ_3 依序分別為網目1、3和5公分漁獲量的母體平均值。
- $\bar{x}_1$ 、 $\bar{x}_2$ 和 $\bar{x}_3$ 依序分別為網目1、3和5公分漁獲量的樣本平均值。
- $k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。
- 網目1公分樣本數量 $n_1 = 4$ ，網目3公分樣本數量 $n_2 = 4$ ，網目5公分樣本數量 $n_3 = 4$ ，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 12$ 。
- 全部樣本平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{4 \times 109.0 + 4 \times 108.5 + 4 \times 86.0}{12} = 101.1667$ 。
- S_1^2 、 S_2^2 和 S_3^2 依序分別為網目1、3和5公分漁獲量的樣本變異數。

複習2：檢定程序

A. 顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 3-1, 12-3} = 4.2565(\text{F.INV.RT})$ 。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 所有母體平均值皆相等。

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等。

D. 計算檢定統計值： F 值

$$\blacklozenge \text{SSTR} = \sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 4 \times (109.0 - 101.1667)^2 + 4 \times (108.5 - 101.1667)^2 + 4 \times (86.0 - 101.1667)^2 = 245.44 + 215.11 + 920.11 = 1380.67$$

$$\blacklozenge \text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{1380.67}{3-1} = 690.3333$$

$$\blacklozenge \text{SSE} = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2 = (4 - 1) \times 70.6667 + (4 - 1) \times 185.0000 + (4 - 1) \times 11.3333 = 212.0 + 555.0 + 34.0 = 801.00$$

$$\blacklozenge \text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{\text{SSE}}{n_t - k} = \frac{801.00}{12 - 3} = 89.00$$

$$\blacklozenge \text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{690.3333}{89.00} = 7.7566$$

E. 檢定統計值 $F = 7.7566 >$ 臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = 4.2565$ ，接受對立假設。

◆ 網目1、3和5公分漁獲量有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

複習2：變異數分析表

變異來源(Source of variation)	平方和 (Sum of squares)	自由度 (Degrees of freedom)	均方 (Mean square)	F值
樣本間變異或組間變異 (Treatments)	1380.67	2	690.33	7.7566
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)	801.00	9	89.00	
合計(Total)	77719.44	11		

Excel資料分析：變異數分析操作示範

複習3

- 於變異數分析(ANOVA)的實驗設計，設母體分布符合常態分布，考慮以下的檢定：
 - ◆ 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
 - ◆ 對立假設 H_1 ：至少有一個均數是不相等的
- 且經計算得到以下訊息：
 - ◆ $SS(\text{處理}) = 6750$ ， $SSE = 8000$ ， $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 5$ 為各組樣本數
- 檢定統計值為何？
- 題解： $k = 4$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$ 。

複習3：檢定程序

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = F_{0.05, 4-1, 20-4} = F_{0.05, 3, 16} = 3.2389$ (F.INV.RT)。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ 所有母體平均值皆相等

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等

D. 計算檢定統計值：F值

$$\blacklozenge SSTR = \sum_{j=1}^k n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 6750$$

$$\blacklozenge MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{6750}{4-1} = 2250$$

$$\blacklozenge SSE = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2 = 8000$$

$$\blacklozenge MSE = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{SSE}{n_t - k} = \frac{8000}{20-4} = 500$$

$$\blacklozenge F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{2250}{500} = 4.50$$

E. 檢定統計值 $F = 4.50 >$ 臨界值 $F_{\alpha, k-1, n_t-k} = 3.2389$

◆ 接受對立假設。

複習3：變異數分析表

變異來源(Source of variation)	平方和 (Sum of squares)	自由度 (Degrees of freedom)	均方 (Mean square)	F值
樣本間變異或組間變異 (Treatments)	6750	3	2250	4.50
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)	8000	16	800	
合計(Total)	14750	19		

複習4

- 某大學園藝系師生欲調查四塊不同土壤特性的農地(分別標示為A、B、C和D)，同時測試三種不同品牌的有機肥料(分別標示為甲、乙和丙)進行玉米產量的研究。試驗種植的玉米產量如下表所示：
- 試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，4塊農地玉米產量是否相同？3種品牌有機肥料玉米產量是否相同？

農地	有機肥料	甲	乙	丙
A		50	40	60
B		60	60	70
C		60	70	70
D		65	50	50

複習4：題解

		有機肥料			處理和	處理平 均值 $\bar{x}_{1\sim 3}$
		甲	乙	丙		
農地	A	50	40	60	150	50.00
	B	60	60	70	190	63.33
	C	60	70	70	200	66.67
	D	65	50	50	165	55.00
處理和		235	220	250		
處理平均值 $\bar{x}_{.1\sim 4}$		58.75	55.00	62.50		58.75

複習4：農地對玉米產量的影響

A. 顯著水準 $\alpha = 0.05$ ， $F_{\alpha, a-1, (a-1) \times (b-1)}$ (臨界值) = $F_{0.05, 4-1, (4-1) \times (3-1)} = 4.7571$ (F.INV.RT)。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.} = \mu_{4.}$ 農地的四種處理之玉米產量的母體平均值皆相等。

C. 對立假設 $H_1: \mu_{i.} \neq \mu_{j.}$ 農地的四種處理之玉米產量的母體平均值不全部相等。

D. 計算檢定統計值： F 值，農地水準數量 $a = 4$ ，肥料水準數量 $b = 3$ 。

$$\blacklozenge SST = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x})^2 = (50 - 58.75)^2 + (40 - 58.75)^2 + \dots + (50 - 58.75)^2 + (50 - 58.75)^2 = 1006.25$$

$$\blacklozenge SSA(\text{農地}) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 = b \times \sum_{i=1}^a (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 = 3 \times [(50.00 - 58.75)^2 + (63.33 - 58.75)^2 + (66.67 - 58.75)^2 + (55.00 - 58.75)^2] = 522.91667$$

$$\blacklozenge SSB(\text{肥料}) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 = a \times \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 = 4 \times [(58.75 - 58.75)^2 + (55.00 - 58.75)^2 + (62.50 - 58.75)^2] = 112.5$$

$$\blacklozenge SSE = SST - SSA - SSB = 1006.25 - 522.91667 - 112.5 = 370.83333$$

$$\blacksquare MSA(\text{農地}) = \frac{SSA}{a-1} = \frac{522.91667}{4-1} = 174.30556$$

$$\blacksquare MSB(\text{肥料}) = \frac{SSB}{b-1} = \frac{112.5}{3-1} = 56.25$$

$$\blacksquare MSE = \frac{SSE}{(a-1) \times (b-1)} = \frac{370.83333}{(4-1) \times (3-1)} = 61.805556$$

$$\blacklozenge F(\text{農地}) = \frac{MSA}{MSE} = \frac{174.30556}{61.805556} = 2.8202$$

E. 檢定統計值 $F = 2.8202 < \text{臨界值 } F_{\alpha, a-1, (a-1) \times (b-1)} = 4.7571$ ，接受虛無假設。

◆ 彼此之間並沒有達到顯著性的差異水準。

複習4：有機肥料對玉米產品影響

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ， $F_{\alpha, b-1, (a-1) \times (b-1)}$ (臨界值) = $F_{0.05, 3-1, (4-1) \times (3-1)} = F_{0.05, 2, 6} = 5.1433$ (F.INV.RT)。

B. 虛無假設 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 有機肥料的三種處理對玉米產量的母體平均值皆相等。

C. 對立假設 $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 有機肥料的三種處理對玉米產量的母體平均值不全部相等。

D. 計算檢定統計值： F 值

$$\text{◆ 檢定統計值 } F(\text{肥料}) = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} = \frac{56.25}{61.805556} = 0.9101$$

E. 檢定統計值 $F = 0.9101 < \text{臨界值 } F_{\alpha, b-1, (a-1) \times (b-1)} = 5.1433$ ，接受虛無假設。

◆ 有機肥料三種品牌所生產的玉米產量，彼此之間並沒有達到顯著性的差異水準。

複習4：二因子設計變異數分析表

變異來源 (Source of variation)	平方和 (Sum of squares)	自由度 (Degrees of freedom)	均方 (Mean square)	F值
農地	522.92	3	174.31	2.820
肥料	112.5	2	56.25	0.910
誤差	370.83	6	61.81	
合計	1006.25	11		

Excel資料分析：雙因子變異數分析：無重複試驗。操作示範